

INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA

مقدمة في
الجبر الخطي

الأستاذ الدكتور
علي جاسم التميمي


دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه
www.massira.jo



دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه
www.massira.jo





مقدمة في
الجبر الخطي

INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA

رقـــــــم التصـــــنيف : 512.5

المؤلف ومن هو في حكمه : علي جاسم التميمي

عنــــــوان الكـــــتاب : مقدمة في الجبر الخطي

رقـــــــم الإيــــــداع : 2008/7/2294

الـــــواصــــفـــــات : الجبر الخطي/ الرياضيات

بـــيانــــــات الـــنشــــر : عمان - دار المسيرة للنشر والتوزيع

تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

الطبعـــة الأولــى 2009م – 1430هـ

الطبعـــة الثانية 2014م – 1435هـ



عنوان الدار

الرئيسي : عمان - العبدلي - مقابل البنك العربي هاتف : 5627049 6 962+ فاكس : 5627059 6 962+

الفرع : عمان - ساحة المسجد الحسيني - سوق البتراء هاتف : 4640950 6 962+ فاكس : 4617640 6 962+

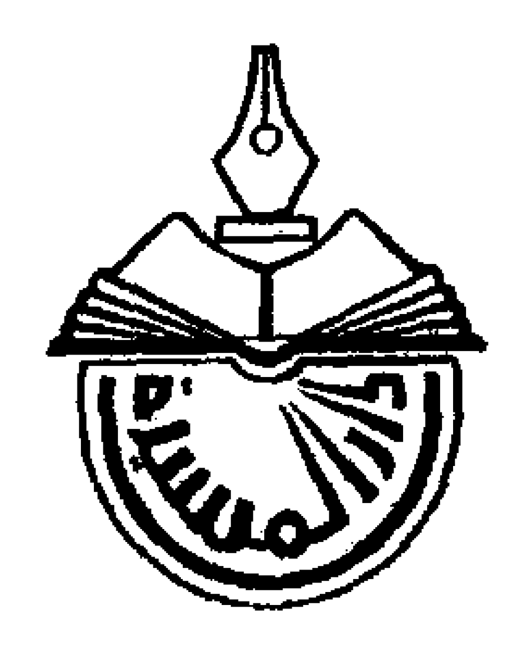
صندوق بريد 7218 عمان - 11118 الأردن

E-mail: Info@massira.jo . Website: www.massira.jo

مقدمة في
الجبر الخطي

INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA

الأستاذ الدكتور
علي جاسم التميمي



الإهداء

إلى أرواح والديّ وأخوتي فليح وخليل رحمهم الله

وفاءً وخفض جناح إلى زوجتي الفاضلة عائدة ...

وأبنائي ميس وعليا وسيف...

كل الحب والتقدير ...



المحتويات

الفصل الثالث

المتجهات في فضاء البعد الثاني وفضاء البعد الثالث

الفصل الرابع

فضاء المتجهات الاقليدي

الفصل الخامس

فضاء المتجهات العام

الفصل السادس

فضاء الضرب الداخلي

الفصل السابع

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

الفصل الثامن

التحويلات الخطية العامة

المقدمة

كان الجبر الحديث ولا يزال واحداً من مواضيع الرياضيات المهمة والأساسية التي لا يمكن أن يخلو منها أي منهج لطلبة الرياضيات، وقد ازدادت أهميته يوماً بعد آخر ليس لطلبة الرياضيات وحسب وإنما لطلبة العلوم والتربية والكثير من الاختصاصات الأخرى. لذلك فإن الجبر إضافة لكونه مادة رياضية تساهم في تطوير القدرة على التفكير والإبداع فإنه مادة أساسية لطلبة العلوم التطبيقية الأخرى.

يعد الجبر الخطي الذي هو أحد فروع الجبر الحديث أداة ضرورية لدراسة مواضيع مختلفة مثل الفيزياء والكيمياء والاقتصاد والإحصاء وعلم الاجتماع وغيرها من العلوم وقد أصبح الجبر الخطي في السنوات الأخيرة يشكل جزءاً أساسياً من الخلفية الرياضية المطلوبة في كثير من العلوم.

يمكن استخدام هذا الكتاب كمقرر منهجي لطلبة العلوم والتربية وكمصدر مهم للعلوم الأخرى، ومن هذا كان التوجه للإسهام بهذا الجهد المتواضع نضعه بين أيدي طلبتنا الأعزاء ولرفد المكتبة العربية باضافة جديدة. يتألف هذا الكتاب من ثمانية فصول يشمل كل فصل على أمثلة مختلفة وتمارين متنوعة.

يتضمن الفصل الأول المعادلات الخطية وطرق حلها وجزء كبير من خواصها إضافة لدراسة المصفوفات وخواصها الجبرية المهمة.

الفصل الثاني، يتناول دراسة المحددات وطرق إيجادها.

الفصل الثالث يتناول دراسة المتجهات في فضاء البعد الثاني وفضاء البعد الثالث وبشيء من التفصيل لما درسه الطالب حول مفاهيم المستقيمات والمستويات.

يبحث الفصل الرابع فضاء المتجهات الاقليدية والتحويلات الخطية من R^n إلى R^m ودراسة خواصها.

يغطي الفصل الخامس مفاهيم فضاء المتجهات العام الحقيقي.

أما الفصل السادس فهو يتعامل مع مفهوم فضاء الضرب الداخلي مع دراسة بعض من خواصه الهندسية.

يتعلق الفصل السابع بدراسة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المرافقة لها وكذلك دراسة أقطره المصفوفات.

وأخيراً يتعامل الفصل الثامن مع التحويلات الخطية لفضاء المتجهات العام ومصفوفات التحويلات الخطية.

هذا وأقدم شكري وتقديري لجامعة صنعاء والمسؤولين فيها إدارة وأساتذة لما لمسته منهم من حسن أخلاق وطيبة شجعني على إخراج هذا الجهد المتواضع كما وأرجو من القراء الكرام موافاتي بآرائهم وملاحظاتهم القيمة.

ومن الله التوفيق

المؤلف

الدكتور علي حسن جاسم التميمي

أستاذ الرياضيات المشارك

جامعة صنعاء - كلية العلوم - اليمن

الفصل الأول



أنظمة المعادلات الخطية والمصفوفات

الفصل الأول

أنظمة المعادلات الخطية والمصفوفات

1-1 مقدمة في أنظمة المعادلات الخطية:

تعتبر دراسة المعادلات الخطية وحلولها من المواضيع المهمة في الرياضيات وخصوصاً في الجبر الخطي إضافة لاستخداماتها في العلوم التطبيقية الأخرى. سوف نقدم في هذا البند بعض العلاقات الرياضية الأساسية ومناقشة طرق حل تلك الأنظمة.

يمكن تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى -xy بالصيغة:

$$ax + by = c$$

تمثل هذه الصيغة معادلة خطية بمتغيرين هما x و y ويمكن كتابة المعادلة الخطية التي تحتوي على n من المتغيرات، تسمى في بعض الأحيان المجاهيل، بالصيغة:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

حيث $c, a_n, \dots, a_2, a_1$ ثوابت حقيقية. إن حل المعادلة

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$ هي الأعداد $s_n, \dots, s_2, s_1$ بحيث تتحقق المعادلة عندما نعوض

$$x_n = s_n, \dots, x_2 = s_2, x_1 = s_1$$

مثال (1):

المعادلات الآتية هي نماذج من المعادلات الخطية

1. $x + 2y = 8$
2. $x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7$
3. $y = x + 3/4\ z$

أما المعادلات الآتية فهي ليست معادلات خطية:

1. $x + 2y^2 = 3$

2. $y - \cos\theta = 0$

3. $\sqrt{x_1} + 3x_2 + x_3 = 1$

لاحظ أن صيغة المعادلة الخطية تحتوي على متغيرات من الدرجة الأولى ولا تحتوي على متغيرات بدرجة أعلى أو جذور أو دوال مثلثية أو ضرب متغيرات مع بعضها أو دوال أسية.

مثال (2):

الصيغ الآتية:

$3x_1 - x_2 + 5x_3 = -4$

$4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1$

تمثل نظاماً خطياً يحتوي على معادلتين بثلاث متغيرات، وقيم المتغيرات $x_1 = 1$، $x_2 = 2$ و $x_3 = -1$ هي حل للنظام، لأنها تحقق كلا المعادلتين أما $x_1 = 1$ و $x_2 = 8$ و $x_3 = 1$ فهي ليست حلاً لأنها لا تحقق كلا المعادلتين.

ومن الجدير بالذكر ان بعض الأنظمة ليس لها حلاً، مثال ذلك.

$x + y = 6$

$2x + 2y = 10$

والسبب هو عند ضرب المعادلة الثانية في $\frac{1}{2}$ نحصل على النظام الآتي:

$x + y = 6$

$x + y = 5$

والتي تناقض إحداهما الأخرى.

يسمى النظام الخطي الذي له على الأقل حل واحد فقط، بالنظام المتسق والذي ليس له حل يسمى نظام غير متسق.

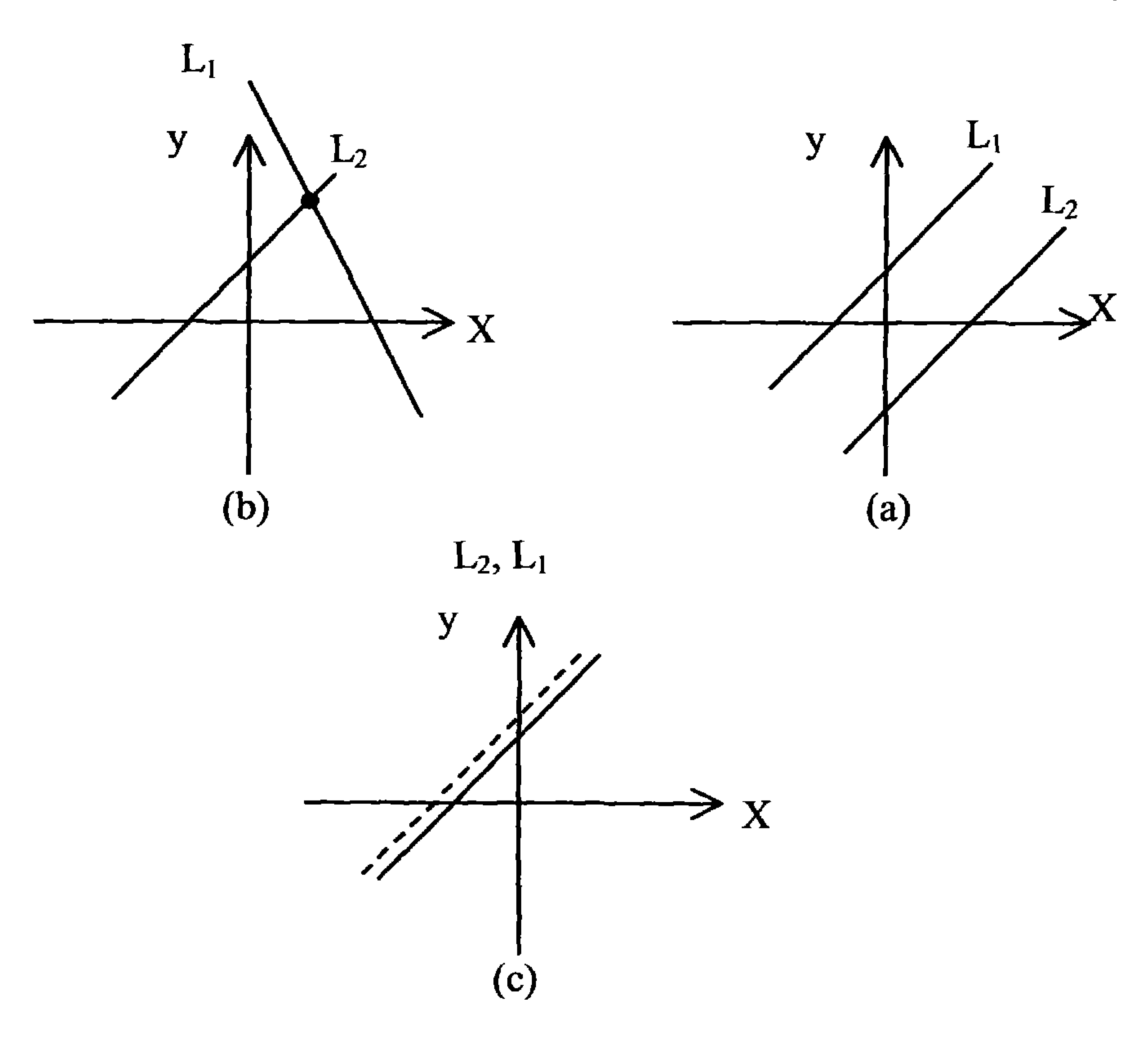
المعنى الهندسي للنظام الخطي :

يمثل النظام الخطي العام المتكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين x و y بالصيغة الآتية:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

إن الشكل الهندسي لهذه المعادلات هو الخطوط المستقيمة L_1 و L_2 كما في الشكل (1-1) ولما كانت النقطة (x, y) تقع على المستقيم إذا وفقط إذا كانت x و y تحقق معادلة المستقيم، فإن حلول النظام الخطي تقابل نقاط المستقيمين L_1 و L_2 كما موضح في الشكل (1-1).



شكل (1-1)

من خلال الشكل (1-1) يتضح أن هناك ثلاث احتمالات للحلول وهي:

1- المستقيمان L_2, L_1 متوازيان، أي لا يوجد نقطة تقاطع، وعليه فليس للنظام الخطي حل [شكل a (1-1)].

2- المستقيمان L_2, L_1 يتقاطعان بنقطة، وهذا يعني ان النظام الخطي له حل واحد فقط [الشكل b (1-1)].

3- المستقيمان متطابقان، أي يوجد عدد غير محدود من الحلول [شكل c (1-1)].

نستنتج من ذلك أن أي نظام خطي إما ليس له حل أو له حل واحد فقط أو له عدد غير منتهي من الحلول.

تسمى المجموعة المنتهية المتكونة من m من المعادلات الخطية، التي تحوي على n من المتغيرات $x_n, \ldots, x_2, x_1$ نظام المعادلات الخطية. وتسمى أيضاً بالنظام الخطي. أما المتابعة المتكونة من n من الأعداد الحقيقية $s_n, \ldots, s_2, s_1$ حلاً للنظام الخطي إذا كانت $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ حلاً لكل معادلة من النظام الخطي.

ويمكن كتابه النظام الخطي المتكون من m من المعادلات التي تحتوي على n من المتغيرات بالصيغة:

$$
\begin{array}{cccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}\, x_n = c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}\, x_n = c_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
a_{m1} + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m
\end{array}
$$

إذ أن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي متغيرات و c, a_{ij} ثوابت حيث:

$j = 1, 2, \ldots, n \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$

طريقة حل أنظمة المعادلات الخطية:

الطريقة الأساسية لحل نظام معادلات خطية تكون باستبدال نظام معطى بنظـام جديد يمتلك مجموعة الحل نفسها ولكنها أسهل في الحل. يتم الحصول على هذا النظام الجديد بسلسلة خطوات بتطبيق ثلاث أنواع من العمليات وذلك لحذف المجاهيل:

1- تبادل معادلتين لبعضهما الأخرى.

2- ضرب معادلة ما بثابت غير صفري.

3- جمع مضاعف إحدى المعادلات إلى أخرى.

مثال (3):

حل النظام الخطي الآتي:

$L_1: x - 5y + 2z = 13$

$L_2: 3x - 14y + 3z = 29$ .... (1)

L_3 $4x - 12y + 3z = 35$

الحل:

1. نضرب المعادلة L_1 في 3- ونضيف حاصل الضرب للمعادلة L_2.

نرمز لهذه العملية بالرمز $-3L_1 + L_2$، كذلك نضــرب L_1 في 4- ونضيفـه إلى L_3 (أي أن العملية هي $-4L_1 + L_3$).

وبموجب هاتين العمليتين سنحصل على النظام المكافئ الآتي:

$L'_1: x - 5y + 2z = 15$

$L'_2: \quad y - 3z = -10$ .... (3)

$L'_3: \quad 2y - 5z = -17$

2. نضرب المعادلة L'_2 في 2- ونضيفه إلى L'_2، سنحصل على النظام المكافئ (العمليـة هي $-2L'_2 + L'_{23}$).

$L''_1: x - 5y + 2z = 15$ .... (4)

$L''_2: \quad y - 3z = -10$

$L''_3: \quad 2 = 3$

من L''_3 نحصل على $z = 3$ وبتعويضها في L''_2 نحصل على $y = -1$ وأخيراً نعوض عن z , y في L''_1 فنحصل على $x = 2$ ، أي أن مجموعة الحل هي: $\{2, -1, 3\}$.

لاحظ أن النظام الخطي (3) يكافئ النظام (1). ويسمى النظام (3) نظام خطي بالصيغة المدرجة صفياً.

مثال (4):

حل النظام الخطي الآتي:

$$x + 2y - 3z = 6$$

$$2x - y + 4z = 2$$

$$4x + 3y - 2z = 14$$

الحل:

باعتماد أسلوب المثال 3 نفسه سنحصل على النظام الخطي المكافئ الآتي:

$$x + 2y - 3z = 6$$

$$y - z = 2$$

يتضح من المعادلتين أعلاه أننا حصلنا على معادلتين خطيتين بثلاث متغيرات، وللحصول على الحل نفرض أن $z = t$ ثم نجد قيم y, x بالتعويض في المعادلة الثانية والأولى. عليه فإن الحل يكون:

$$x = 2 - t \quad , \quad y = 2 + 2t \quad , \quad z = t$$

لاحظ أن t في المثال 4 يسمى بالوسيط وتكون الحلول غير منتهية لأنها تعتمد على t، حيث t أي عدد حقيقي.

ملاحظة:

إذا كانت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ في النظام الخطي (1) تساوي أصفاراً فإن النظام هذا يسمى بالنظام المتجانس، أما إذا كانت الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ لا تساوي أصفار فإن النظام الخطي يسمى بالنظام غير المتجانس.

مثال (5):

حل النظام الخطي المتجانس الآتي:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + w &= 0 \\ x - 3y + z - 2w &= 0 \\ 3x + y - 3z + 5w &= 0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots (5)$$

الحل:

بتحويل هذا النظام للشكل المدرج صفياً باستخدام طريقة المثال (2) نحصل على النظام المكافئ.

$$\begin{aligned} x + w &= 0 \\ y + 7w &= 0 \\ z + 6w &= 0 \end{aligned}$$

وبفرض $w = t$ وتعويضها في المعادلات أعلاه نحصل على الحلول:

$X = 11t \quad , \quad y = -7t \quad , \quad Z = -6t \quad , \quad w = t$

المصفوفة الممتدة: يمكن وضع الثوابت في النظام الخطي (1) بالصيغة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & c_m \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (6)$$

إذ أن a_{ij} هي أعـداد حقيقيـة تمثـل معـاملات المتغـيرات و c_i تمثـل الثوابـت في الطرف الأيمن من النظام (1). تسمى الخطوط الأفقية صفوفاً، أما الخطـوط العموديـة فتسمى أعمدة، ويقال للصغية (6)، المصفوفة الممتدة.

مثال (6):

يمكن وضع ثوابت النظام الخطي الـواردة في (2) بصيغـة مصفوفـة ممتـدة علـى النحو الآتي

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & \vdots & 13 \\ 3 & -14 & 3 & \vdots & 29 \\ 4 & -18 & 3 & \vdots & 35 \end{bmatrix}$$

وبما أن الصفوف الواردة في المصفوفة الممتدة تقابل المعادلات الواردة في النظـام الخطي للمثال (3)، فإن التعليمات الثلاث المستخدمة في طريقة حل المعادلات الخطيـة تكافئ العمليات المستخدمة على صفوف المصفوفة الممتدة الآتية:

1- ضرب أي صف بكمية ثابتة غير صفرية.

2- تبديل أي صفين أحدهما مكان الآخر.

3- إضافة مضاعف أحد الصفوف لصف آخر.

وتسمى هذه العمليات، عمليات الصف البسيطة.

مثال (7):

حل النظام الخطي الوارد في المثال (3) باستخدام عمليات الصف البسيطة.

الحل:

1. المصفوفة الممتدة للنظام هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & \vdots & 13 \\ 3 & -14 & 3 & \vdots & 29 \\ 4 & -18 & 3 & \vdots & 35 \end{bmatrix}$$

2. نضرب الصف الأول في 3- ونضيفه إلى الصف الثاني. كذلك نضرب الصف الأول في 4- ونضيفه للصف الأول ولذلك سوف نحصل على المصفوفة الممتدة المكافئة الآتية:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 2 & -5 & -17 \end{array}\right]$$

3. بضرب الصف الثاني في 2- وإضافته للصف الثالث سنحصل على المصفوفة الممتدة المكافئة:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

الصيغة التي حصلنا عليها تسمى الصيغة المدرجة التي تقابل النظام الخطي المكافىء:

$$x - 5y + 2z = 13$$
$$y - 3z = -10$$
$$z = 3$$

وبالتعويض عن قيمة z نحصل على الحل:

$$x = 2 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad z = 3$$

تمارين بند (1-1)

1- أي من المعادلات الآتية خطية:

a. $x + 5y - \sqrt{3}z = 1$

b. $x_1 + 2x_2 + x_1x_2 = 4$

c. $x^{-2} + y + 8z = 5$

2- أوجد المعادلة الخطية التي متغيراتها x و y إذا علمت أن الحل العام لها هو:

$x = 5 + 2t \qquad , \qquad -y = t$

3- أوجد قيمة k (الثابت) بحيث يكون للنظام الخطي الآتي:

a) حل وحيد.

b) عدد غير منتهي من الحلول.

c) لا يوجد حل.

$x - y = 3$

$2x - 2y = k$

4- حل النظام الخطي الآتـي باستخدام العمليات الثلاث الـواردة في طريقـة حـل الأنظمة الخطية.

$x + y + 2z = 9$

$2x + 4y - 3z = 1$

$3x + 6y - 5z = 0$

5- نفرض أن لدينا النظام الخطي الآتي:

$x + y + 2z = a$

$x + z = b$

$2x + y + 3z = c$

برهن إذا كان النظام أعلاه متسق فإن $c = a + b$

1-2 طريقة حذف كاوس

يتضمن هذا البند إعطاء صيغة نظامية لحل أنظمة المعادلات الخطية والتي تعتمد على فكرة اختزال المصفوفة الممتدة إلى شكل بسيط نستطيع من خلاله معرفة حل المعادلات الخطية بمجرد النظر إليها.

مثال (1): حل النظام الخطي الآتي:

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

الحل:

1. نوجد المصفوفة الممتدة للنظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 2 & 4 & -3 & \vdots & 1 \\ 3 & 6 & -5 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

2. باستخدام سلسلة من عمليات الصف البسيط نستطيع الحصول على الصيغة المختزلة الآتية: (برهن ذلك).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

وتسمى هذه الصيغة، الصيغة المدرجة الصفية المختزلة، ولكي تكون المصفوفة بهذه الصيغة يجب أن تحقق الخواص الآتية:

a. إذا كانت عناصر صف ما ليست جميعها أصفاراً، فإن أول عدد غير صفري في الصف يجب أن يكون 1 ويسمى الدليل.

b. إذا وجد صف ما أو عدة صفوف جميع عناصرها أصفار فإنها توضع أسفل المصفوفة.

c. في أي صفين متعاقبين ليست جميع عناصرها أصفار، فإن الدليل 1 للصف الأسفل يكون أبعد إلى اليمين من الدليل 1 في الصف الأعلى.

d. كل عمود يحوي الدليل 1 تكون عناصره الأخرى صفر.

ملاحظة:

المصفوفة التي تحقق الشروط c, b, a فقط تسمى بالصيغة المدرجة الصفية.

مثال (1):

المصفوفات الآتية هي بالصيغة المدرجة الصفية المختزلة

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

أما المصفوفات:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

فهي بالصيغة المدرجة الصفية وليست بالصيغة المدرجة الصفية المختزلة.

مثال (2):

نفرض أن المصفوفات الآتية هي بالصيغة المدرجة الصفية المختزلة المكافئة لمصفوفات ممتدة. أوجد نظام المعادلات الخطية المقابلة لكل منهما.

$$\text{a.}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{b.}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

الحل:

نظام المعادلات الخطية المقابلة للصيغة في a هو:

$$x_1 \qquad\qquad = 5$$

$$x_2 \qquad = -2$$

$$x_3 = 4$$

وبمجرد النظر لهذا النظام، نحصل على الحل $x_3 = 4, x_2 = -2, x_1 = 5$

أما النظام المقابل للصيغة في b فهو:

$$x_1 \qquad\qquad + 4x_4 = -1$$

$$x_2 \qquad + 2x_4 = 6$$

$$x_3 + 3x_4 = 2$$

أي إن:

$$x_1 = -1 - 4x_4$$

$$x_2 = 6 - 2x_4$$

$$x_3 = 2 - 3x_4$$

وبفرض $x_4 = t$ (x_4 يسمى المتغير الحر و t يسمى المتغير الوسيط).

فإن:

$$x_1 = -1 - 4t$$

$$x_2 = 6 - 2t$$

$$x_3 = 2 - 3t$$

لاحظ أن هنالك عدد غير محدود من الحلول.

مثال (3):

اختزل المصفوفة الممتدة الآتية للصيغة المدرجة الصفية المختزلة.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

1. لكي نجعل العنصر الأول في العمود الأول لا يساوي صفر نبادل الصف الأول بأي صف آخر. فمثلا نبادل الصف الأول مع الصف الثاني وسنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

2. نجعل العدد الأول في الصف الأول يساوي 1 وذلك بضرب الصف الأول في $\frac{1}{2}$ فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

3. نجعل الأعداد في العمود الأول أسفل الدليل 1 مساوية للصفر، وذلك بضرب الصف الأول في 2- وإضافته للصف الثالث فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

4. لكي نحصل على الدليل 1 في العمود الثالث نحول العدد 2- في الصف الثاني إلى 1 بضرب الصف الثاني في $\frac{1}{2}$ فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -28 \end{bmatrix}$$

5. لكي نحصل على صفر أسفل الدليل 1 في الصف الثاني. نحول العدد 5 في الصف الثالث إلى صفر من خلال ضرب الصف الثاني في 5- وإضافته إلى الصف الثالث لنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. نحول العدد $\frac{1}{2}$ في الصف الثالث للدليل 1 وذلك بضرب الصف الثالث في 2 فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. الصيغة الواردة في الفقرة (6) أعلاه هي الصيغة المدرجة الصفية، ولكي نحصل على الصيغة المدرجة الصفية المختزلة نستمر بتطبيق عمليات الصف البسيطة.

8. نضرب الصف الثالث في $\frac{7}{2}$ ونضيفه للصف الثاني فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. نضرب الصف الثالث في 6- ونضيفه إلى الصف الأول لنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. وأخيرا نضرب الصف الثاني في 5 ونضيفه للصف الأول فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وهذا الشكل هو بالصيغة المدرجة الصفية المختزلة.

ملاحظة:

تسمى الطريقة التي تختزل المصفوفة الممتدة إلى الصيغة المدرجة الصفية المختزلة (طريقة حذف كاوس - جوردان). أما إذا حصلنا على الصيغة المدرجة الصفيـة فقـط فتسمى (طريقة حذف كاوس).

تمارين بند (2-1)

1- حل النظام الخطي الآتي مستخدما طريقة حذف كاوس - جوردان

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2_{x4} \quad - 3x_6 = -1$$

$$5x_3 + 10_{x4} + 15x_6 = 5$$

$$2_{x1}+6_{x2t} \qquad +8_{x4} -18_{x6} = 6$$

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 18x_6 = 6$$

2- حل النظام الخطي الآتي باستخدام طريقة حذف كاوس

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

3- أوجد قيمة k بحيث يكون للنظام الخطي الآتي:

$$x_1 + x_2 + (k^2 - 5)\, x_3 = k$$

$$x_1 + x_2 - \qquad x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + \qquad x_3 = 3$$

a. ليس له حل.

b. له حل وحيد.

c. عدد غير منته من الحلول.

4- أي من المصفوفات الآتية بالصيغة المدرجة الصفية المختزلة.

$$a.\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad b.\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$c.\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad d.\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

5- أي من المصفوفات الآتية بالصيغة المدرجة الصفية.

$$a.\begin{bmatrix}1&2&5\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad b.\begin{bmatrix}1&3&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$c.\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&0\end{bmatrix}\qquad b.\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

6- إذا كانت الصيغ الآتية هي مدرجة صفية وقد حصلنا عليها من اختزال مصفوفات ممتدة لأنظمة خطية حل النظام.

$$a.\begin{bmatrix}1&-2&7&1\\0&1&3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad b.\begin{bmatrix}1&-2&5&7\\0&1&3&2\\0&0&1&5\end{bmatrix}$$

$$c.\begin{bmatrix}1&5&-2&6&-7&2\\0&0&1&1&5&3\\0&0&0&1&2&9\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

7- حل النظام الآتي وبأي طريقة تختارها.

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0\\ x_1 + x_2 \qquad &= 0\\ x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

1-3 المصفوفات والعمليات على المصفوفة:

تعريف (1-3-1):

المصفوفة هي ترتيب مستطيل الشكل من الأعداد الحقيقية. الأعداد في هذا الترتيب تسمى عناصر المصفوفة.

مثال (1):

$$[5],\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 3\\ -2 & 3 & 4 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & -4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

هذه الأشكال تسمى مصفوفات.

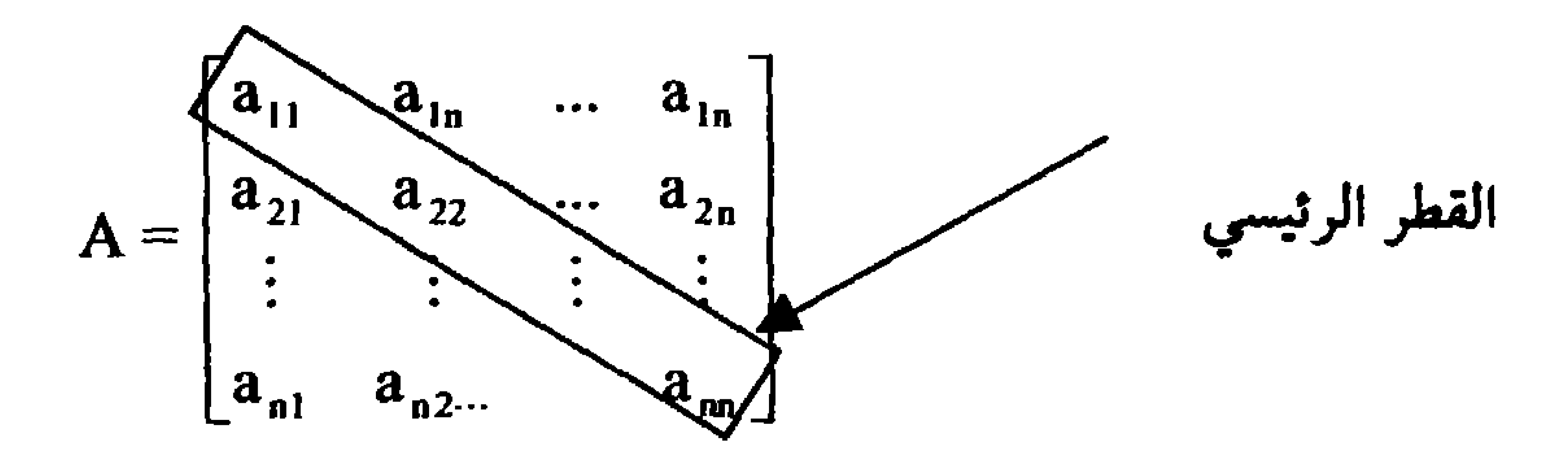
الخطوط الأفقية للعناصر تسمى صفوفا والخطوط العمودية تسمى أعمدة.

عدد الصفوف (الخطوط الأفقية) وعدد الأعمدة (الخطوط العمودية) يسمى سعة المصفوفة. فمثلا المصفوفة الأولى تحتوي على ثلاثة صفوفه وثلاث أعمدة لذا فسعتها 3x3. أما المصفوفة الثانية فتحتوي على صف واحد وأربع أعمدة فسعتها، إذن 1x4، أما بقية المصفوفات فسعتها: 3 x 1 , 2 x 4 , 1 x 1 على التوالي. تستخدم الحروف الكبيرة A ,B, ... لتسمية المصفوفات والعنصر الواقع في الصف رقم i والعمود رقم j يرمز له بالرمز a_{ij}.

وبشكل عام المصفوفة التي سعتها mxn تكتب بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn}\end{bmatrix} \quad \text{.......} \quad (1)$$

عندما يكون عدد الصفوف مساويا لعدد الأعمدة فإن A تسمى مصفوفة مربعة سعتها n x n. قطر المصفوفة المربعة الذي عناصره $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ يسمى القطر الرئيسي كما موضح أدناه:



العمليات على المصفوفة:

تعريف (1-3-2):

يقال للمصفوفتين A ,B بأنهما متساويتين إذا تساوت سعتهما والعناصر المتقابلة فيهما.

إذا كانت $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ فإن $A = B$ إذا وفقط إذا $a_{ij} = b_{ij}$ لكل i ,j حيث $i, j = 1, 2, \dots , n$.

تعريف (1-3-3):

إذا كانت A ,B مصفوفتين بنفس السعة فإن جميعها $B + A$ هو مصفوفة C يمكن الحصول عليها بإضافة عناصر المصفوفة A إلى عناصر B المتناظرة.

ملاحظة:

إذا كانت سعة A تختلف عن سعة B فإن جمعهما $A + B$ يكون غير معرف.

مثال (2):

لتكن

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 3 & 2 & 1 & 5\end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

إذن:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+3 & -3+4 & 4+2 \\ 0+0 & -1+1 & 5+1 & 3-3 \\ 2+3 & 4+2 & 0+1 & 1+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

وعندما $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ فإن $A + D$ و $B + D$ غير معرفتان لأن سعتهما مختلفة.

ملاحظة:

طرح المصفوفات هي حالة خاصة لعملية الجمع والضرب بكمية ثابتة 1-.

فمثلا إذا كانت A و B مصفوفتان كما في المثال (2) فإن:

$$A - B = A + (-1)\,B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

تعريف (4-3-1):

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة و k كمية ثابتة فإن ضربهما kA هو المصفوفة الناتجة من ضرب كل عنصر في A بالكمية الثابتة k، أي أن:

$$kA = [ka_{ij}]$$

مثال (3):

لتكن $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ و $k = -2$ فإن:

$$kA = -2\begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 \\ -6 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

تعريف (5-3-1):

لتكن $A = [a_{ij}]$ سعتها $m \times n$, $[b_{ij}]$ و B سعتها $p \times q$ فإن ضربهما، $C = AB$ هو مصفوفة، شريطة أن يكون عدد أعمدة A مساويا لعدد صفوف B، أي أن $n = p$ ويكون حاصل الضرب هو:

$$C = [C_{ij}] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

التي سعتها $m \times q$

للحصول على العناصر C_{ij} في C نضرب عناصر الصف في الموقع i من المصفوفة A بالعناصر المقابلة في العمود رقم j من المصفوفة B ثم نجمع حواصل الضرب.

مثال (4):

نفرض $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ أوجد $C = AB$

الحل:

بما أن عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف B فإن الضرب AB يكون معرفا.

عليه:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+(-2)(-1) & 1\times4+(-2)\times2 \\ 2\times1+0\times(-1) & 2\times4+0\times2 \\ 3\times1+5\times(-1) & 3\times4+5\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 8 \\ 2 & 22 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

عملية الضرب BA في المثال (4) غير معرفة لأن عدد أعمدة B لا يساوي عدد صفوف A.

وبصورة عامة إذا كانت $A = [a_{ij}]$ سعتها mxr و $B = [b_{ij}]$ سعتها $r \times n$ فإن العنصر C_{ij} في الصف رقم i والعمود رقم j في $C = AB$ هو:

$$C_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ir} b_{rj} \quad \dots\dots (2)$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & & b_{rj} & & b_{rn} \end{bmatrix}$$

الشكل المصفوفي لأنظمة المعادلات الخطية:

لضرب المصفوفات تطبيقات مهمة في أنظمة المعادلات الخطية. خذ أي نظام متكون من m من المعادلات الخطية التي تحتوي على n من المتغيرات:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_1 = b_1$$

$$a_{22}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_2 = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

فإنه يمكننا كتابته بدلالة ضرب المصفوفات بالصيغة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت سعتها m x 1

مصفوفة المعاملات سعتها n x 1

مصفوفة المعاملات سعتها m x n

وإذا اسمينا مصفوفة المعاملات بالرمز A ومصفوفة المتغيرات بالرمز x ومصفوفة الثوابت بالرمز B، فإن النظام أعلاه يمكن كتابته بالصيغة المبسطة:

$$A\,X = B$$

ضرب المصفوفات كتركيب خطي:

تزودنا مصفوفات الصفوف والأعمدة بأفكار بديلة لضرب المصفوفات، فمثلا افترض أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

فإن

$$Ax=\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots + & a_{2n}x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + xn\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

أي أن AX هي تركيب خطي لأعمدة A مركباتها من المصفوفة x.

مثال (5):

ضرب المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

يمكن كتابته كتركيب خطي:

$$3\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

وضرب المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & -20 & -37 \end{bmatrix}$$

يمكن كتابته كتركيب خطي:

$$1\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & -20 & -37 \end{bmatrix}$$

تمرين:

إذا كانت:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 8 \\ 2 & 22 \end{bmatrix}$$

فإن مصفوفات أعمدة AB يمكن التعبير عنها كتركيب خطي لمصفوفات أعمدة A.

تعريف (1-3-6):

إذا كانت A مصفوفة سعتها $m \times n$ فإن منقوله A، تكتب A^T، وتعرف بأنها المصفوفة الناتجة من تبديل صفوف A بأعمدتها وتكون سعتها $n \times m$

ملاحظة:

العمود الأول في A^T هو الصف الأول في A والعمود الثاني في A^T هو الصف الثاني في A وهكذا.

مثال (6):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

فإن: $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

تعريف (1-3-7):

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن أثر A (يكتب $tr(A)$) يعرف بأنه مجموع العناصر الواقعة في القطر الرئيسي.

مثال (7):

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$tr(B) = -1 + 2 + 7 + 1 = 9$$

تمارين بند (1-3)

1- لتكن

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}, \quad E=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

احسب ما يأتي أن أمكن:

a. $2B - C$, b. $3E - 2D$, c. $-2(D + 3E)$

d. $5tr(3b)$, e. $D - E$

2- استخدم المصفوفات في (1) أعلاه لإيجاد:

a. $3A^T + C$, b. $B^T + 4C^T$, c. $(C^TB)A^T$

d. $B - B^T$, e. $2E^T - 3D^T$, f. $(D - E)^T$

3- اكتب الأنظمة الخطية الآتية بالصيغة $AX = B$

a. $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$

$8x_1 - x_2 + x_3 = -1$

$x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$

b. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$

$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$

$3x_1 \quad + x_3 = 3$

4- إذا كانت AB و BA معرفتان فإن AB و BA مصفوفات مربعة.

5- اكتب ما يأتي بصيغة أنظمة معادلات خطية:

$$a.\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 2 & 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 4\end{bmatrix} \qquad b.\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\ 8\\ 1\end{bmatrix}$$

6- إذا كانت A تحتوي على صف جميع عناصره أصفار و B مصفوفة ما بحيث يكون AB معرفا. برهن أن AB تحتوي على صف جميع عناصره أصفار.

7- لتكن A مصفوفة سعتها $m \times n$ و 0 مصفوفة سعتها $m \times n$ بحيث تكون جميع عناصرها أصفار. بين إذا كانت $kA = 0$ فإن $k = 0$ أو $A = 0$

1-4 معكوس المصفوفة:

سنناقش في هذا البند بعض خواص عمليات المصفوفات الجبرية، وسوف نلاحظ ان عددا من القواعد الأساسية الحسابية للأعداد الحقيقية تنطبق على المصفوفات عدا بعض منها.

خواص عمليات المصفوفات:

إذا كانت a و b أعداد حقيقية فإن $ab = ba$ (قانون التبديل في الضرب) إلا أن هذه الخاصية قد لا تتحقق في ضرب المصفوفات. أي إذا A و B مصفوفتان فإن $AB \neq BA$ حتى إذا كانت AB و BA معرفتان ولهما نفس السعة.

مثال (1):

خذ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ فإن:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 10\\ -10 & 2\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -8\\ 7 & -2\end{bmatrix}$$

لذا: $AB \neq BA$

مبرهنة (1-4-1):

إذا كانت سعة كل من المصفوفات A و B و C تلائم العمليات إزائها فإن خواص المصفوفات الآتية تكون متحققة:

1. $A + B = B + A$ (قانون التبديل).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (قانون التجميع)
3. $A (BC) = (AB) C$ (قانون التجميع بالضرب).
4. $A (B + C) = AB + AC$ (التوزيع من اليسار).
5. $(A + B)C = AC + BC$ (التوزيع من اليمين)
6. $A (B - C) = AB - AC$
7. $(B - C)A = BA - CA$
8. $a (B + C) = aB - aC$
9. $a (B - C) = a B - aC$
10. $(a + b) C = aC + bC$
11. $(a - b) C = aC- bC$
12. $a (bC) = (ab) C$
13. $a (BC) = (aB)C = B (aC)$

البرهان:

لبرهان المتساويات أعلاه يجب أن نبين:

1- أن سعة المصفوفات في الجهة اليمنى تساوي سعة المصفوفات في الجهة اليسرى.

2- العناصر المتقابلة في كلا الجانبين متساوية.

باستثناء قانون التجميع في (3) فإن برهان جميع الحالات الأخرى متشابهه. لذا سنكتفي ببرهان المتساوية (4)، أما برهان (3) فهو أكثر تعقيدا لذا سنعطي مثالا يوضحها.

نثبت أولا أن $A(B+C) = AB + AC$ لتكوين $A(B+C)$ يجب أن تكون المصفوفتان B و C لهما نفس السعة لنقل $m \times n$، عليه فإن عدد أعمدة A يجب أن يكون m، فسعة A يجب ان تكون بالشكل $r \times m$ هذا سيجعل $A(B+C)$ مصفوفة سعتها $r \times n$. ينتج من ذلك أن سعة $AB + AC$ هي $r \times n$. إذن $A(B+C)$ و $AB + AC$ لهما نفس السعة.

لتكن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ و $C = [C_{ij}]$، نريد أن نبرهن أن العناصر المتقابلة في $A(B+C)$ و $AB + AC$ متساوية. أي أن:

$[A(B+C)]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$ لكل قيم i و j.

من عمليات جمع وضرب المصفوفات نحصل على:

$$[A(B+C)]_{ij} = a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \ldots + a_{im}(b_{mj} + c_{mj})$$

$$= (a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}) + (a_{i1}c_{ij} + a_{i2}c_{2j} + \ldots + a_{im}c_{mj})$$

$$= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$$

ملاحظة:

العنصر في A الذي يقع في الصف رقم i والعمود رقم j يكتب بالشكل $[A]_{ij}$

مثال (2):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

فإن:

$$A(B+C) = AB + AC$$

الحل:

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&3\\4&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&11\\31&25\\4&4\end{bmatrix},\ B+C=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3\\4&4\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&6\\11&12\\2&3\end{bmatrix}\quad ,AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}$$

عليه $A(B+C)=AB+AC$

مثال (3):

باعتماد المصفوفات في المثال (2) حقق صحة:

$$A(BC)=(AB)C$$

الحل:

$$BC=\begin{bmatrix}10&3\\4&3\end{bmatrix}\qquad ,AB=\begin{bmatrix}8&5\\20&15\\2&1\end{bmatrix}$$

$$B(BC)=\begin{bmatrix}18&15\\46&39\\4&3\end{bmatrix}\quad ,(AB)=\begin{bmatrix}18&15\\46&39\\4&3\end{bmatrix}$$

إذن

$$A(BC)=(AB)=C$$

المصفوفة الصفرية: هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفارا.

مثال (4):

$$a. \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad c. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هي أمثلة على المصفوفة الصفرية.

ملاحظة:

لا يتحقق قانون الاختصار في المصفوفات بصورة عامة، أي إذا كانت C, B, A مصفوفات فليس صحيحا اختصار A من العلاقة $AB = AC$ لكي نحصل على $B = C$ كذلك $AB = 0$ مع ذلك $A \neq 0$, $B \neq 0$

مثال (5):

نفرض

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} , \ C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} , \ D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عليه:

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

مع أن $A \neq 0$ فإن اختصار A لا يعطي $B = C$ وكذلك $AD = 0$ مع أن $A \neq 0$ و $D \neq 0$

مبرهنة (2-4-1):

بفرض سعة المصفوفات تحقق العمليات المؤشرة إزاءها فإن المتساويات الآتية متحققة.

1. $A + 0 = 0 + A$
2. $A + (-A) = 0$
3. $0 + (-A) = -A$
4. $0.A = 0 \ , A.0 = 0$

البرهان:

(يترك تمرين)

المصفوفة المحايدة: تسمى المصفوفة محايدة إذا كانت مربعة وجميع عناصرها في القطر الرئيسي تساوي 1 وبقية العناصر أصفار، يرمز للمصفوفة المحايدة بالرمز I_n، وسعتها $n \times n$

مثال (6):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ و $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ هي مصفوفات محايدة.

تعريف (3-4-1):

لتكن A مصفوفة مربعة و B مصفوفة لها نفس سعة A. يقال للمصفوفة A بأنها قابلة للانعكاس إذا تحقق الشرط الآتي:

$$AB = BA = I_n$$

وتسمى B معكوس A

يرمز لمعكوس A بالرمز A^{-1} وتصبح العلاقة أعلاه:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

مثال (7):

لتكن $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ فإن $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

هو معكوس A لأن:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1}A = I_3$$

عليه فإن A قابلة للانعكاس.

مبرهنة (1-4-4):

إذا كانت كل من B و C معكوس A فإن $B = C$.

البرهان:

بما أن B معكوس A فإن $BA = I_n$

وبالضرب في C نحصل على:

$(BA)\,C = I_n\,C = C$

ولكن $(BA)\,C = B\,(AC) = BI_n = B$

لذا فإن $B = C$

مبرهنة (1-4-5):

إذا كانت A و B مصفوفتان لهما نفس السعة وقابلتان للانعكاس فإن:

1. AB قابلة للانعكاس.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

البرهان:

بما أن $(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = AI_n\,A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$

فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

وبنفس الطريقة $(B^{-1}A^{-1})\,(AB) = I_n$

يمكن تعميم المبرهنة أعلاه لثلاث أو أكثر من العوامل، أي أن معكوس ضرب أي عدد منتهي من المصفوفات هو حاصل ضرب المعكوسات بترتيب معاكس، بمعنى آخر:

1. $A_1A_2 \dots A_n$ قابلة للانعكاس.

2. $(A_1A_2 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \dots A_1^{-1}$

تعريف (1-4-6):

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن:

$$A^0 = I_n \quad , \quad A^n = \underbrace{A.A \dots A}_{n \text{ من العوامل}} \quad (n > 0)$$

علاوة على ذلك، إذا كانت A قابلة للانعكاس فإن:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1} . A^{-1} \dots . A^{-1}}_{n \text{ من المرات}}$$

مبرهنة (1-4-7):

إذا كانت A مصفوفة مربعة و m و n أعداد صحيحة فإن

1. $A^m . A^n = A^{m+n}$

2. $(A^m)^n = A^{mn}$

البرهان: (يترك كتمرين).

مرهنة (1-4-8):

لتكن A قابلة للانعكاس فإن:

1. A^{-1} قابلة للانعكاس و $(A^{-1})^{-1} = A$

2. A^n قابلة للانعكاس و $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ حيث $n = 0, 1, 2, \dots, n$

3. لكل عدد ثابت k المصفوفة kA قابلة للانعكاس و:

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

البرهان:

1. بما أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ فإن A^{-1} قابلة لانعكاس، و $(A^{-1})^{-1} = A$ (برهن)

2. لما كانت $A^n . A^{-n} = A^{n-n} = A^o = I$ لذا A^n قابلة للانعكاس.

$$(A^n)^{-1} = (\underbrace{A.A \dots A}_{\text{n من العوامل}})^{-1} = \underbrace{A^{-1} . A^{-1} \dots A^{-1}}_{\text{n من العوامل}} = (A^{-1})^n$$

3. نفرض $k \neq 0$. من المبرهنة (1-4-1):

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = \left(\frac{1}{k}k\right)AA^{-1} = 1.I_n = I_n$$

و

$$\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)(kA) = k\left(\frac{1}{k}A\right)A^{-1} = \left(k\frac{1}{k}\right)A^{-1}A = 1.I_n = I_n$$

لذا فإن kA قابلة للانعكاس وأن $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

مثال (8):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ فإن:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 34 \\ 34 & 55 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -55 & 34 \\ 34 & -21 \end{bmatrix}$$

مبرهنة (9-4-1):

(خواص منقولة المصفوفة): إذا كانت سعة كل من A و B تلائم العمليات إزاءها فإن:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T \quad , \quad (A-B)^T = A^T - B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$ حيث k ثابت.
4. $(AB)^T = B^T A^T$

البرهان:

1. تطبق مباشر على تعريف المنقولة.

2 و 3. تترك كتمرين.

4. نفرض أن سعة المصفوف A هي $m \times n$ وسعة B هي $n \times p$ وبما أن سعة A B هي $m \times p$ (لماذا؟) فإن سعة $(AB)^T$ هي $p \times m$ والآن عنصر $(AB)^T$ في الموقع ij يساوي عنصر AB في الموقع ji ويساوي:

$$\sum_{=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \quad \text{.................................} (1)$$

لتكن $B^T = (c_{ij})$, $A^T = (d_{ij})$ حيث $C_{ij} = b_{ji}$ و $d_{ij} = a_{ji}$ لكل زوج i, j لذا فإن عنصر $B^T A^T$ في الموقع ij يساوي $\sum_{k=1}^{n} C_{ik} d_{kj}$ ويساوي

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\, a_{jk} \quad \text{.................................} (2)$$

من (1) و (2) ينتج:

$$(AB)^T = B^T A^T \text{.................................} (3)$$

ملاحظة:

يمكن تعميم الفقرة (4) من المبرهنة (7-4-1) لأكثر من مصفوفتين، أي أن: منقولة حاصل ضرب أي عدد منتهى من المصفوفات يساوي حاصل ضرب منقولاتها بترتيب معكوس جبريا تكتب:

$$(A_1A_2 \dots A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^t \dots A_1^T$$

مبرهنة (8-4-1):

إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس فإن A^T قابلة للانعكاس و

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad \dots\dots (4)$$

البرهان:

من المبرهنة (7-4-1):

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^{-1} = I$$

و

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^{-1} = I$$

مثال (9):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ فإن:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

عليه فإن: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

متعددة الحدود المتضمنة مصفوفات:

إذا كانت A مصفوفة سعتها $m \times n$ و $p(x)$ أي متعددة حدود

$$p(x) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$$

فإننا نعرف

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_o I_n$$

مثال (10):

إذا $p(x) = x^2 - 2x + 1$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ فإن:

$$P(A) = A^2 - 2A + I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمارين بند (1-4)

1. لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. بين أن:

a. $A + (B + C) = (A + B) + C$

b. $(AB)C = A\,(BC)$

c. $(k_1 + k_2)\,C = k_1C + k_2C$

d. $\alpha\,(BC) = (\alpha B)\,C = B\,(\alpha A)$

علما أن $\alpha = -3$, $k_1 = 26$, $k_2 = -3$

2. باستخدام المصفوفات في التمرين (1). بين أن:

a. $(A^T)^T = A$, b $= (A + B)^T = A^T + B^T$

c. $(AB)^T = B^TA^T$, d $= (\alpha C)_T = \alpha\, C_T$

3. إذا كانت $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ أوجد A.

4. إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، أوجد A^3 و A^{-3}

5. لتكن A كما في تمرين 4. أوجد P (A) إذا علمت أن $P(x) = 2X^2 - x + 1$

6. إذا علمت أن A و B مصفوفات مربعة بحيث AB = 0. بين أن إذا كانت A قابلة للانعكاس فإن B = 0.

7. يقال للمصفوفة A بأنها متناظرة إذا كانت $A^T = A$. ومتناظرة عكسيا إذا كانت $A^T = -A$. استخدم هذا التعريف وبين أن BB^T متناظرة وأن $B-B^T$ متناظرة عكسيا.

8. احسب معكوس A إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

9. أوجد a و b بحيث $\begin{bmatrix} 2 & a & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ b & 2 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة متناظرة.

10. إذا كانت A و B مصفوفات متناظرة وسعة كل منهما $n \times n$. برهن أن $A + B$ متناظرة.

1-5 المصفوفات البسيطة، طريقة إيجاد معكوس المصفوفة A^{-1}:

سوف نستعرض في هذا البند تنسيقا بسيطا لإيجاد معكوس المصفوفة ونناقش بعض الخواص الأساسية للمصفوفات القابلة للانعكاس.

تعريف (1-5-1):

تسمى المصفوفة المربعة A مصفوفة بسيط إذا أمكن إيجادها من المصفوفة المحايدة I_n باستخدام عملية صف بسيطة واحدة.

مثال (1):

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ حصلنا على هذه المصفوفة بضرب الصف الثاني من I_2 في 2−

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ حصلنا على هذه المصفوفة من I_3 بتبديل الصفين الثاني والثالث.

.c $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ حصلنا على هذه المصفوفة من I_3 بإضافة حاصل ضرب الصف الثالث في 4- وإضافته إلى الصف الأول.

عند ضرب مصفوفة A من جهة اليسار بمصفوفة أولية مثل E، فإن تأثير ذلك يكون معادلة لإجراء عملية صفية على A.

مثال (2):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة بسيطة حصلنا عليها من ضرب الصف الأول في 3 وإضافة حاصل الضرب إلى الصف الثالث من المصفوفة I_3 .

إذن:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

وهذا الشكل معادل للمصفوفة الناتجة من إضافة 3 أضعاف الصف الأول في A إلى الصف الثالث فيها.

ملاحظة:

إذا أثرت عملي صف بسيطة E على المصفوفة المحايدة I_n للحصول على مصفوفة بسيطة، فإنه توجد عملية صف ثانية إذا أثرت على E ستعيدها إلى I_n.

مثال (3):

تفرض أن E مصفوفة ناتجة من ضرب الصف رقم i في المصفوفة I_n بالثابت غير الصفري k.

وإذا ضربنا الصف رقم i من المصفوفة E بالثابت $\frac{1}{k}$ فإننا سنحصل على المصفوفة I_n، العمليات التي تعيد E إلى I_n تسمى العمليات العكسية.

مبرهنة (2-5-1):

كل مصفوفة بسيطة قابلة للانعكاس وكذلك المعكوس مصفوفة بسيطة.

البرهان:

لتكن E مصفوفة بسيطة ناتجة عن تأثير عملية صفية بسيطة على I_n. أفرض أن 'E مصفوفة ناتجة من تأثير معكوس هذه العملية على I_n، وبموجب الملاحظة أعلاه وحقيقة أن عمليات الصف العكسية تزيل تأثير أحدهما للأخرى فإن:

$$E'E = I_n \quad , \quad E\,E' = I_n$$

لذا فالمصفوفة البسيطة 'E هي معكوس E.

مبرهنة (3-5-1):

لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$، فإن الصيغ الآتية متكافئة، أي، إما جميعها صحيحة أو جميعها خاطئة.

1. A قابلة للانعكاس.
2. $AX = 0$ لها حل وحيد هو الحل الصفري.
3. الصيغة المدرجة الصفية المختزلة للمصفوفة A هي المصفوفة I_n.
4. يعبر عن A كحاصل ضرب مصفوفات بسيطة.

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$: نفرض أن A قابلة للانعكاس وأن X' هو حل للنظام المتجانس $AX = 0$. لذا فإن $AX' = 0$.

$\because$ A قابلة للانعكاس فإن A^{-1}، معكوس A، موجود. بضرب $AX' = 0$ بالمصفوفة A^{-1} من جهة اليسار نحصل على

$$A^{-1}AX' = A^{-1}.0 = 0$$

إذن $X' = 0$. نستنتج من ذلك أن الحل الوحيد هو الحل الصفري.

$2 \Leftarrow 3$: نفرض أن $AX = 0$ هو الشكل المصفوفي للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad \dots\dots\dots (1)$$

افرض أن حل هذه النظام هو الحل الصفري. إذا استخدمنا طريقة اختزال كاوس- جوردان فإن نظام المعادلات المقابل للشكل المدرج الصفي المختزل للمصفوفة الممتدة سيكون:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad \qquad &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \\ \ddots \quad & \\ x_n &= 0 \end{aligned} \qquad \dots\dots\dots (2)$$

لذا فالمصفوفة الممتدة هي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

وبتطبيق عمليات الصف البسيطة على المصفوفة الممتدة للمعادلات الخطية (1) سنحصل على المصفوفة الممتدة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن الصيغة المدرجة الصفية المختزلة للمصفوفة A هي I_n.

3 ⇐ 4 : نفرض أن الصيغة المدرجة الصفية المختزلة للمصفوفة A هو I_n.

نضرب A من جهة اليسار بسلسلة من عمليات الصف البسيطة فتتحول A إلى I_n.

$$E_1E_2 \dots E_n A = I_n \quad \dots\dots (3)$$

ولما كانت E_1, E_2، .... ، E_n قابلة للانعكاس، وبضرب طرفي المعادلة (3) بالمصفوفات $E_n^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1}$ نحصل على:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_n^{-1} . I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_n^{-1} \quad \dots\dots (4)$$

وبموجب المبرهنة (2-5-1) فإن A يعبر عنها كحاصل ضرب مصفوفات بسيطة.

4 ⇐ 1: إذا عبرنا عن A كحاصل ضرب مصفوفات بسيطة، فإن A هي حاصل ضرب مصفوفات قابلة للانعكاس ومن ذلك نستنتج أن A قابلة للانعكاس [لاحظ مبرهنة (5-4-1) ومبرهنة (2-5-1).

بعكس طرفي الصيغة (3) نحصل على:

$$A^{-1} = E_n \dots E_2E_1 . I_n \quad \dots\dots (5)$$

هذا يعني أن المصفوفة A نحصل عليها بضرب I_n من اليسار بالمصفوفات البسيطة E_1, E_2, ... , E_n .

وبمقارنة العلاقتين (3) و (5) يتبين لنا أن سلسلة عمليات الصف التي تحول A إلى I_n ستحول I_n إلى A^{-1}.

طريقة إيجاد معكوس المصفوفة القابلة للانعكاس:

تتلخص هذه الطريقة بإيجاد عمليات صف بسيطة تحول A إلى I_n ومن ثم استخدام نفس هذه السلسلة من العمليات على المصفوفة المحايدة بجوار A للحصول على A^{-1}. وللقيام بذلك نضع المصفوفة المحايدة على يمين A للحصول على الشكل $[A : I_n]$ ومن ثم إجراء عمليات الصف على هذه المصفوفة حتى يتحول الجانب الأيسر إلى I_n. هذه العمليات ستحول الجانب الأيمن إلى A^{-1}، وسنحصل على الشكل $[I_n : A^{-1}]$.

مثال (4):

أوجد معكوس
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$[A \ : \ I] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to -4R_1+R_3]{R_2 \to -2R1+R_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to -R_3+R_3 \\ R_3 \to -R_3}]{R_1 \to 2R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow [I \ : \ A^{-1}]$$

إذن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

التحقيق:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (5):

أوجد معكوس $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

الحل:

$$[A \;\vdots\; I_3] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 8 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \to -\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to (-3)R_1+R_3]{R_3 \to (-4)R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{14} & \frac{4}{14} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{14} & \frac{-1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{5}{14} & \frac{-13}{14} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \to \frac{1}{5}R3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{14} & \frac{4}{14} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{14} & \frac{-1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & \frac{-13}{20} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to (-1)R_3+R_2]{R2 \to R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{8}{70} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & \frac{-13}{70} & \frac{1}{5} \end{array}\right] = [I \;\vdots\; A^{-1}]$$

عليه فإن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{14} & \frac{8}{70} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{14} & \frac{-13}{70} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} 0 & 7 & 14 \\ 5 & 8 & -14 \\ 5 & -13 & 14 \end{bmatrix}$$

التحقيق:

$$A^{-1}A = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} 0 & 7 & 14 \\ 5 & 8 & -4 \\ 5 & -13 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} = I_3$$

ملاحظة:

من غير الممكن مسبقا معرفة فيما إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس أم لا. فإذا كانت A غير قابلة للانعكاس فلا يمكن اختزالها إلى I_n بموجب العمليات الصفية البسيطة، بمعنى آخر، أن الشكل المدرج الصفي المختزل للمصفوفة A يحتوي على الأقل على صف واحد جميع عناصره أصفار.

مثال (6):

نفرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

الحل:

باعتماد الطريقة الموضحة في المثالين 4 و 5 نحصل في إحدى خطوات الحل على الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إذ أن الصف رقم 3 من المصفوفة من الجهة اليسرى جميع عناصره أصفار. لذا فالمصفوفة غير قابلة للانعكاس.

تمارين بند (5-1)

1. أوجد معكوس ما يأتي:

$$a.\ A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 3 & 4\\0 & 0 & 4\end{bmatrix} \qquad b.\ \begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\1 & 0 & 3\\2 & 5 & -4\end{bmatrix}$$

2. بين أن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 0 & 0\\-4 & 6 & 1\end{bmatrix}$ ليس لها معكوس.

3. وضح أي من المصفوفات الآتية مصفوفة بسيطة:

$$a.\ \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \qquad b.\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad c.\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -4\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4. أي من المصفوفات الآتية بالصيغة المدرجة الصفية وأي منها بالصيغة المدرجة الصفية المختزلة.

$$a.\ \begin{bmatrix}2 & 5 & 4\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -3\end{bmatrix} \qquad b.\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\0 & 1 & 3 & 4\end{bmatrix} \qquad c.\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5. الأعداد في المصفوفات تمثل معاملات نظام معادلات خطي. حل هذه المنظومة وحولها للصيغة المدرجة الصفية المختزلة علما بأن المصفوفة هي:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 9\\2 & 4 & -3 & 1\\3 & 6 & -5 & 0\end{bmatrix}$$

6. لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. أوجد:

a. المصفوفات البسيطة E_1 و E_2 بحيث $E_2E_1 A = I_2$

b. عبر عن A^{-1} كحاصل ضرب عمليتي صف بسيطة.

c. اكتب A كحاصل ضرب عمليتي صف بسيطة.

1-6 نتائج إضافية على الأنظمة الخطية وقابلية للانعكاس:

نقدم في هذا البند نتائج إضافية للأنظمة الخطية وقابلية انعكاس المصفوفات. علاوة على معرفة طريقة جديدة لحل n من المعادلات التي تحتوي على n من المتغيرات.

مبرهنة (1-6-1):

نظام المعادلات الخطية:

1. ما لا يحتوي على حل.
2. أو يحتوي على حل واحد فقط.
3. أو له عدد غير منتهي من الحلول.

البرهان:

ليكن $A\times= B$ نظام لمعادلات خطية، فإن بالضبط واحد من الاحتمالات أعلاه يكون صحيحا. نفرض أن النظام $A\times= B$ له أكثر من حل و $x_o = x_1 - x_2$ حيث x_2, x_1 حلان معينان للنظام. عليه فإن x_o لا يساوي صفر، إضافة لذلك:

$$A_{xo} = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - A_2 = B - B = O$$

وإذا افترضنا K ثابت فإن:

$$A(x_1 - Kx_O) = Ax_1 + A(kxo) = Ax_1 + k(Ax_o) = B + K_O$$
$$= B + O = B$$

بما أن x_0 لا يساوي صفر فإن $Ax = R$ له أكثر من حل.

لقد قدمنا في البنود السابقة طريقتين، لحل النظام الخطي هما:

1. طريقة حذف كاوس.
2. طريقة حذف كاوس-جوروان.

وسنقوم بتوضيح طريقة أخرى لحل النظام الخطي.

مبرهنة (2-6-1):

إذا كانت A مصفوفة سعتها $n \times n$ وقابلة للانعكاس، فإن النظام الخطي $AX = B$ له حل واحد فقط.

$$X = A^{-1}B$$

البرهان:

بما أن $A(A^{-1}B) = B$، فإن $A^{-1}B$ هو حل للمعادلة $AX = B$. ولكي نثبت بأنه الحل الوحيد، نفرض أن X_1 هو حل أخر لا على اليقين.

لذا فإن $AX_1 = B$، بالضرب في A^{-1} نحصل على $X_1 = A^{-1}B$. ومنها $X_1 = X$.

مثال (1):

حل النظام الآتي:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6$$

$$x_2 - x_3 = -4$$

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 7$$

الحل:

1. نكتب النظام أعلاه بالشكل $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2. نوجد معكوس المصفوفة A بإحدى الطرق السابقة

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 3 & 2/3 \\ -1 & 3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

(تأكد من ذلك)

3. الحل هو:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

أو:

$x_3 = -4$, $x_2 = -8$, $x_1 = 25$

مبرهنة (3-6-1):

لتكن A مصفوفة مربعة

1. إذا كانت المصفوفة المربعة B تحقق $BA = I_n$ فإن $B = A^{-1}$
2. إذا كانت المصفوفة المربعة B تحقق $AB = I_n$ فإن $B = A^{-1}$

البرهان:

نفرض $BA = I_n$، بضرب الطرفين من جهة اليمين في A^{-1} نحصل على $BAA = IA$ أو $BI = IA$.

2- (يترك كتمرين).

مبرهنة (4-6-1):

إذا كانت A مصفوفة مربعة سعتها $n \times n$ ، فإن الصيغ الآتية متكافئة.

1. A قابلة للانعكاس.

2. $AX = 0$ لها حل واحد هو الحل الصفري.
3. الصيغة المدرجة الصفية المختزلة للمصفوفة A هي I_n .
4. يمكن كتابة A كحاصل ضرب مصفوفات بسيطة.
5. النظام $AX = B$ متسق لكل مصفوفة B ذات السعة $n \times 1$.
6. $AX = B$ لها بالضبط حل واحد لكل مصفوفة B ذات السعة $n \times 1$.

البرهان:

الحالات 1 و 2 و 3 و 4 أنظر مبرهنة (3-5-1).

$1 \Leftarrow 3$ انظر المبرهنة (2-6-1).

$6 \Leftarrow 5$: لتكن $AX = B$ لها بالضبط حل واحد فقط لكل B ذات السعة $n \times 1$ فإن $AX = B$ متسق.

$5 \Leftarrow 1$: إذا كان النظام $AX = B$ متسقا لكل مصفوفة B ذات السعة $n \times 1$ فإن الأنظمة: متسقة.

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, AX_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots\ldots, AX_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

نفرض $x_1, x_2, \ldots, x_n$ حلول الأنظمة على التوالي. نضع هذه الحلول بشكل أعمدة لمصفوفة تسميها C. لذا فإن شكل C هو:

$$C = [X_1 : X_2 : \ldots : X_n]$$

كما وان أعمدة AC ستكون $AX_1, AX_2, \ldots, AX_n$.

لهذا:

$$AC = [AX_1, AX_2, \dots, A X_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

وبموجب المبرهنة (3-6-1): نحصل على $C = A^{-1}$. لذا A قابلة للانعكاس.

مثال (2):

ما هي الشرط على b_1, b_2, b_3 لكي يكون النظام الآتي مسنقا.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1$$
$$x_1 \qquad + x_3 = b_2$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3$$

الحل:

باستخدام عمليات صف بسيطة على المصفوفة الممتدة.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & \vdots & b_3 \end{bmatrix}$ نحصل على الشكل المدرج الصفي المختزل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & b_2 \\ 1 & 1 & & \vdots & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

واضح من شكل المصفوفة أعلاه أن النظام الخطي متسق إذا تحققت الشروط:

$b_3 - b_2 - b_1 = 0$ أو $b_3 = b_2 + b_1$

بمعنى آخر أن النظام الخطي $AX = B$ متسق إذا وفقط إذا كانت:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

حيث b_1 و b_2 لا على التعين.

تمارين (6-1)

1. استخدم طريقة المبرهنة (2-6-1) لحل الأنظمة التالية:

a. $4x - 2y = 5$

$-6x + 3y = 1$

b. $2x + y - 3z = 5$

$3x - 2y + 2z = 5$

$5x - 3y - z = 16$

2. استخدم طريقة (المبرهنة (2-6-1) لحل النظام:

$x + 2y + z = b_1$

$x_1 - x_2 + x_3 = b_2$

$x_1 + x_2 = b_3$

استعمل الشكل النهائي لإيجاد الحل إذا $b_3 = 4$, $b_2 = 3, b_1 = -1$

3. إذا كان النظام الآتي متسقا، برهن أن $c = a + b$

$x + y + 2z = a$

$x + z = b$

$2x + y + 3z = c$

1-7 بعض أنواع المصفوفات:

نركز في هذا البند على بعض المصفوفات التي لها شكل خاص. المصفوفات التي سندرسها هذه لها استخدامات مهمة في الجبر الخطي وبقية العلوم الرياضية.

تعريف (1-7-1):

المصفوفة القطرية هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها خارج القطر الرئيسي تساوي صفر.

مثال (1):

$$a.\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad b.\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&5\end{bmatrix}\qquad c.\begin{bmatrix}3&0\\0&-4\end{bmatrix}$$

وبصورة عامة نكتب المصفوفة القطرية بالشكل:

$$D=\begin{bmatrix}a_1&0&\dots&0\\0&a_2&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&a_n\end{bmatrix}$$

لاحظ أن المصفوفة القطرية D قابلة للانعكاس إذا كانت جميع عناصر القطر الرئيسي لا تساوي صفر وتكتب D^{-1} حيث:

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}&0&\dots&0\\0&\frac{1}{a_2}&\dots&0\\0&0&\dots&\frac{1}{a_n}\end{bmatrix}$$

مثال (2):

a. إذا $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

b. إذا $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ فإن $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

تعريف (2-7-1):

تسمى المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها فوق القطر الرئيسي تساوي صفر بالمصفوفة المثلثية السفلي. أما التي جميع عناصرها أسفل القطر الرئيسي تساوي صفر فتسمى المصفوفة المثلثية العليا.

مثال (3):

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية سفلى، أي أن $a_{ij} = 0$ عندما $i < j$

و $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية عليا، أي أن $a_{ij} = 0$ عندما $i > j$.

مبرهنة (3-7-1):

1. منقولة المصفوفة المثلثية السفلي هي مصفوفة مثلثية عليا، ومنقولة المصفوفة المثلثية العليا هي مصفوفة مثلثية سفلي.
2. ضرب المصفوفات المثلثية السفلى هو مثلثية سفلى، وضرب المصفوفات المثلثية العليا هي مثلثية عليا.

3. المصفوفة المثلثية قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا كانت عناصرها في القطر الرئيسي لا تساوي صفر.
4. معكوس المصفوفة المثلثية السفلي القابلة للانعكاس هي مثلثية سفلي، ومعكوس المصفوفة المثلثية العليا القابلة للانعاس هي مثلثية عليا.

البرهان:

1. برهان هذا الجزء يمكن استنتاجه من حقيقة أن منقولة المصفوفة المربعة يمكن إنجازها بعكس العناصر الواقعة حول القطر الرئيسي.
2. نفرض أن A و B مصفوفات مثلثية سفلي، حيث $A = [a_{ij}]$، $B = [b_{ij}]$ و $C = [C_{ij}]$ هي مصفوفة حاصل ضرب A و B

نبرهن أن $C_{ij} = 0$ لكل $i < j$. من تعريف ضرب المصفوفات:

$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$ (انظر تعريف ضرب المصفوفات).

نفرض أن $i < j$ لذا فإن C_{ij} يمكن كتابتها بالشكل:

$$C_{ij} = \underbrace{a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots}_{\text{حدود فيها رقم صفوف b أصغر من رقم أعمدة b}} + \ldots\ldots\, a_{ij-1}\, b_{j-ij} \underbrace{+ a_{ij}\, b_{jj} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}}_{\text{حدود فيها رقم صفوفه a أصغر من رقم أعمدة a}}$$

ولما كانت B مثلثية سفلي فإن عوامل b في الجزء الأول تساوي صفر، كذلك جميع عوامل a في الجزء الثاني تساوي صفر لأن A مثلثية سفلي. عليه فإن $C_{ij} = 0$

برهان (3) و (4) تؤجله للفصول القادمة.

مثال (4):

لتكن
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن A قابلة للانعكاس لان جميع عناصر قطرها الرئيسي لا تساوي صفر بينما B غير قابلة للانعكاس.

تمرين: استخدم طريقة إيجاد المعكوس الواردة في البند (5-1) لإيجاد A^{-1}

تعريف (4-7-1):

المصفوفة المتناظرة A هي المصفوفة التي تساوي منقولتها أي، $A^T = A$

خواص المصفوفة المتناظرة:

لتكن A و B مصفوفتان متناظرتان وسعة كل منهما $n \times n$ فإن:

1. A^T متناظرة.
2. $(A + B)$ متناظرة.
3. kA متناظرة (k ثابت).

لبرهان هذه الخواص راجع مبرهنة (7-4-1).

ملاحظة:

ضرب المصفوفات المتناظرة ليس ضروريا أن يكون متناظرا.

مثال (5):

نفرض أن $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفات متناظرة لكن:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -16 & -4 \end{bmatrix}$$

غير متناظرة.

(2) المصفوفة A^TA متناظرة لأن: $(A^TA)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$

وبنفس الطريقة AA^T

مثال (6):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ فإن:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ومنها A^TA متناظرة.

مبرهنة (5-7-1):

1. إذا كانت A مصفوفة متناظرة وقابلة للانعكاس فإن A-1 متناظرة.
2. إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس فإن $A^T A$ و AA^T قابلتان للانعكاس.

البرهان:

1. نفرض A متناظرة وقابلة للانعكاس. بواسطة مبرهنة (9-4-1) وحقيقية أن $A^T = A$ نحصل على:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

لذا A^{-1} متناظرة

2. بما أن A قابلة للانعكاس فإن A^T قابلة لانعكاس [مبرهنة 9-4-1)]، لذا فإن A^TA و AA^T قابلتان للانعكاس لأن كل منهما مضروب مصفوفتان قابلتان للانعكاس.

تمارين بند (7-1)

1. أي من المصفوفات الآتية قابلة للانعكاس، وإذا كانت كذلك أوجد معكوسها.

a. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

2. احسب قيمة a و b التي تجعل المصفوفة غير قابلة للانعكاس.

$$\begin{bmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. أوجد c, b, a التي تجعل المصفوفة متناظرة.

$$\begin{bmatrix} 3 & a-b+c & 2a+b-c \\ 1 & 4 & a+c \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

4. أوجد A التي تحقق $A^{-2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

5. إذا كانت A مصفوفة متناظرة. برهن أن A^2 متناظرة.

6. برهن أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ تحقق المبرهنة (5-7-1) (1).

7. لتكن $A^TA = A$ فإن A متناظرة و $A^2 = A$.

تمارين محلولة

حل النظام الخطي التالي مستخدما طريقة كاوس وطريق قاوس – جوردن.

$$\begin{array}{lllll} 3_{x1} & + -x_2 & + & x_3 & =4 \\ x_1 & + x_2 & - & x_3 & =4 \\ x_1 & + 2x_2 & + & 3_{x3} & =-5 \end{array}$$

الحل:

(a) توجد المصفوفة الممتدة للنظام الخطي.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 1 & -2 & 3 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$$

(b) نعدل الصفين الأول والثاني – كلا مكان الآخر.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & -2 & 3 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$$

(c) نضرب الصف رقم 1 في –3 ونضيفه للصف الثاني:

وكذلك نضرب الصف رقم 1 بالعدد 1 – ونضيفه للصف الثالث

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 0 & -4 & 4 & \vdots & -8 \\ 1 & -3 & 4 & \vdots & -9 \end{bmatrix}$$

(d) نضرب بالصف رقم 2 بالعدد $-\frac{1}{4}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -8 \\ 0 & -3 & 4 & \vdots & -9 \end{bmatrix}$$

(e) نضرب الصف رقم 2 والعدد 3 ونضيفه:

هذه الصيغة تسمى الصيغة المدرجة الصيغة (أو صيغة كاوس)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$x_3 = -3$$

$$x_2 \qquad x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

وبالتعويض عن x_3 في المعادلة الثانية لإيجاد قيمة x_2 ومن ثم نعوض x_2 و x_3 فإن المعادلة الثالثة لإيجاد x_1 .

وللسهولة في إيجاد قيم x_1 و x_2 و x_3 نستمر في اختزال المصفوفة في الخطوة رقم 5.

(f) بإضافة الصف الثالث لكل من الصفوف رقم 1 أو رقم 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

(g) نضرب الصف الثاني بالعدد 1 ونضيفه للصف الأول.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

وهذه الصيغة تسمى الصيغة المدرجة المختزلة (أو صيغة كارس - جوردن)

وبمجرد النظر نصحل على الحل وهو:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

2. حل النظام الخطي التالي:

$$\begin{bmatrix} x - & 2y & +7 & =-3 \\ 2x + & 3y & -27 & =5 \\ 3x = & y & -7 & =2 \end{bmatrix}$$

الحل:

نوجد المصفوفة الممتدة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & -3 \\ 2 & 3 & -2 & \vdots & 5 \\ 3 & 1 & -1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

بوساطة عمليات الصف البسيطة يتمكن بتحويل المصفوفة أعلاه للصيغة المندمه الصفية (صيغة كاوس) التالية (برهن ذلك).

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 7 & -4 & \vdots & 11 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

بالإستمرار في استخدام عمليات الصف البسيط، نستطيع الحصول على الصيغة المدرجة الصفية المختزلة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \vdots & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \vdots & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الأخيرة هذه هي المصفوفة الممتدة للنظام:

$$x-\frac{1}{7}7=1/7$$

$$y-\frac{4}{7}z=11/7$$

لذا وبفرض $z = t$ فإن

$$x=1/7\ t+1/7$$

$$y=4/7\,t+11/7$$

حيث t أي عدد حقيقي.

نلاحظ من خلال الحل أعلاه أن هناك عدد غير منتهي من الحلول.

3 . أوجد جميع حلول النظام الخطي المتجانس

$$\begin{bmatrix} x+y+z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \\ x+y-z-w=0 \\ 2x+y+z-w=0 \end{bmatrix}$$

الحل:

المصفوفة الممتدة للنظام هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

أما الصيغة المدرجة المختزلة لها فهي (تحقق من ذلك):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

النظام الخطي المقابل هو:

$$x = w$$
$$y = -w$$
$$z = -w$$

عليه فإن الحل هو: $(t_1, -t, t, t)$ لأي عدد حقيقي t.

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

4 – برهن أن $AB \neq BA$

الحل:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

عليه فإن $AB = BA$، بصورة عامة كذلك لما كان $AB \neq 1$ فـإن $AB = BA = I$

ومن ذلك نستنتج أن $B + A^{-1}$، أي أن A غير قابلة للإنعكاس (A^{-1} غير موجودة).

أوجد A^{-1}، إذا وجد معكوس للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

1. تكون المصفوفة $[A \vdots I_3]$

$$[A \vdots I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. بوساطة عمليات الصف البسيطة فإن A تختزل صفيا إلى I^3 ، إذا كانت A قابلة للانعكاس I_3^3، ستصبح A^{-1} .

a) نضرب في الصف الأول في (−3) ونضيفه للصف الثالث:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \vdots & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) نضرب الصف الثاني في (−1) ونضيفه للصف الثالث:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) نضرب الصف الثالث في (−1):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) نضيف الصف الثالث للصف الثاني، ونضرب الصف الثالث في 2 − ونضيفه للصف الأول:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(e) نضرب الصف الثاني في $\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(f) نضيف الصف الثاني إلى الصف الأول:

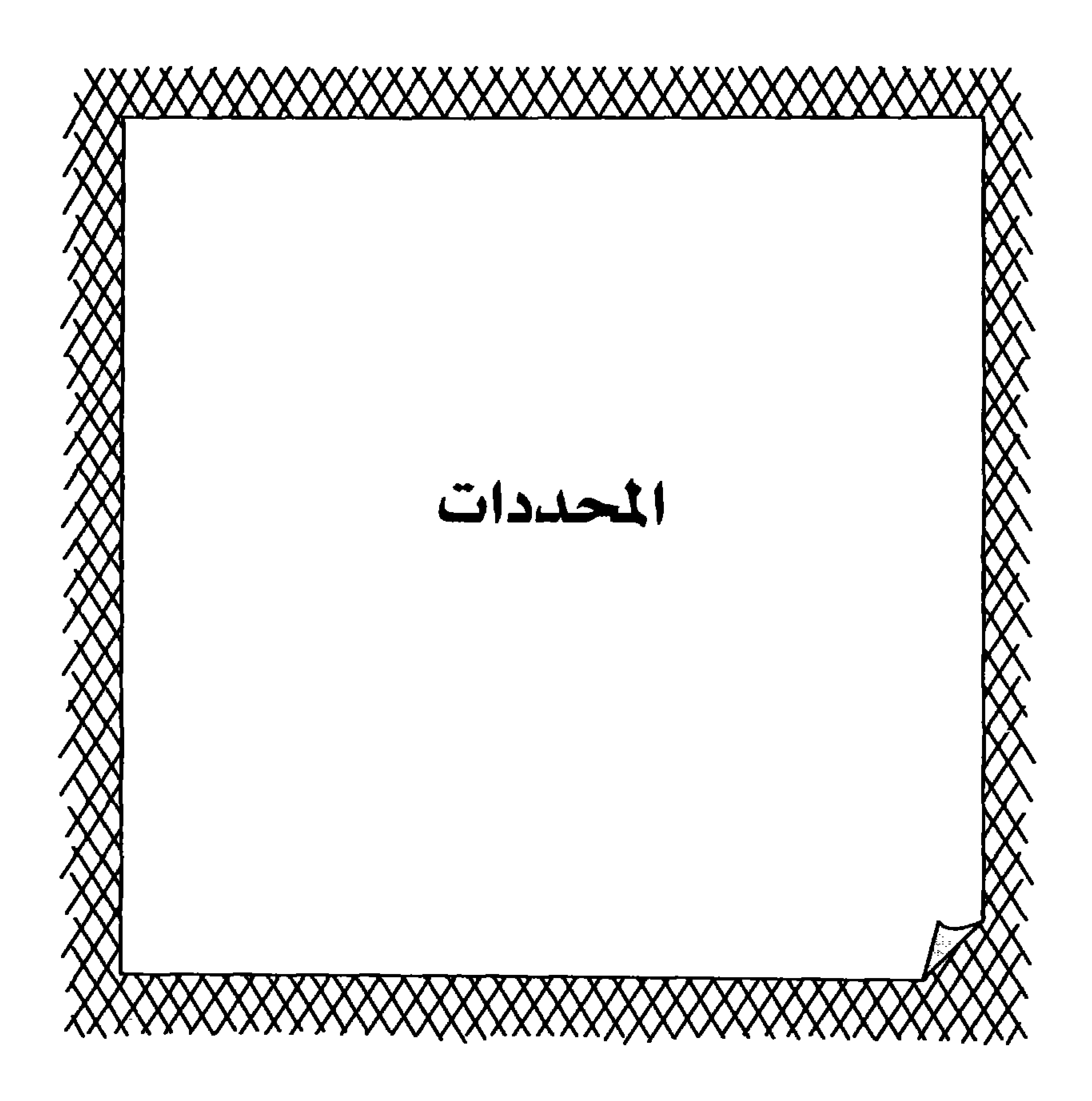
$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -7/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

إذن

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -7/2 & -1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

وتحقق من صحة الحل من خلال اثبات أن ($A^{-1}A=AA^{-1}=I$)

الفصل الثاني



المحددات



الفصل الثاني

المحددات

2-1 دالة المحدد

ظهرت فكرة المحددات لأول مرة عند حل أنظمة المعادلات الخطية وللمحددات تطبيقات مهمة في العديد من مواضع الجبر الخطي كما سنرى في الفصول القادمة. في هذا البند سوف ندرس دالة المحدد، التي هو دالة القيمة الحقيقية للمتغير A, A مصفوفة. بمعنى آخر، أنها ترافق العدد الحقيقي f(A) مع المصفوفة A.

تعريف (2-1-1):

التبديلة لمجموعة n من الأعداد الصحيحة {1 2, ... , n} هي ترتيب تلك الأعداد بشكل معين بدون حذف أو تكرار.

مثال (1):

توجد ست تبديلات مختلفة للمجموعة {1, 2, 3} = X:

(1, 2, 3)　　(2, 1, 3)　　(3, 1, 2)

(1, 3, 2)　　(2, 3, 1)　　(3, 2, 1)

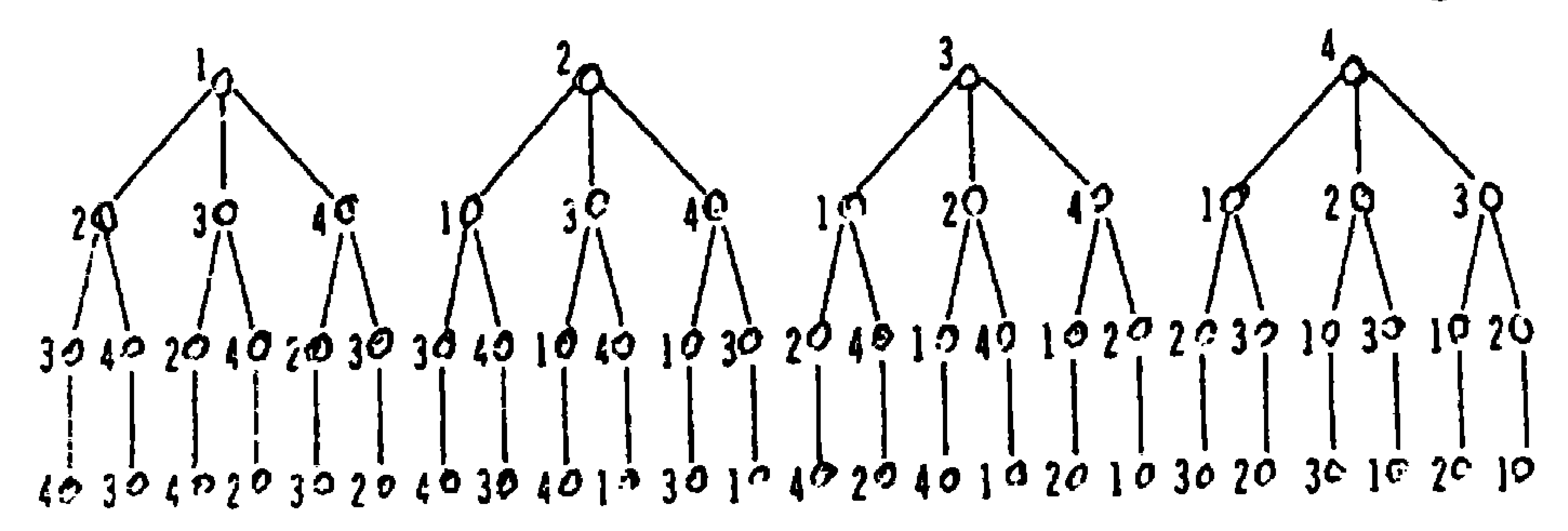
الطريقة الملائمة لجدولة التبديلات هي في استعمال شجرة التبديلات والتي سنبينها في المثال الآتي.

مثال (2):

أوجد جميع تبديلات المجموعة {1, 2, 3, 4}

الحل:

نعين أربعة نقاط كل نقطة تمثل أحد أعداد المجموعة ونكون الشجرة الموضحة في الشكل (1-2).



شكل (1-2)

النقاط الأربعة في أعلى الشكل تمثل الاختيارات الممكنة للعدد الأول من التبديلة. الفروع الثلاث المستقيمة من هذه النقاط تمثل الاختيارات الممكنة للموقع الثاني في التبديلة. فمثلاً إذا بدأت التبديلة (,- , - ,2)، أي أن التبديلة بدأت بالعدد 2، فإن الاحتمالات الثلاث للموقع الثاني هي 1 أو 3 أو 4. الفرعين المتشعبين من كل نقطة من الموقع الثاني يمثلان الاختيارات الممكنة للموقع الثالث. فإذا بدأت التبديلة (- ,- ,2, 3) فإن الاختيارين الممكنين للموقع الثالث هما 1 و 4. وأخيراً الفرع الوحيد المتشعب في كل نقطة في الموقع الثالث يمثل الاختيار الوحيد للموقع الرابع. فإذا بدأت التبديلة مع (- ,2, 3, 4) فإن الاختيار الوحيد للموقع الرابع هو 1.

التبديلات المختلفة يمكن جدولتها من خلال رسم جميع احتمالات ممرات الشجرة بدء من الموقع الأول والغاية الموقع الرابع. لاحظ الجدول الآتي:

(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(3, 1, 2, 4)	(4, 1, 2, 3)
(1, 2, 4, 3)	(2, 1, 4, 3)	(3, 1, 4 2)	(4, 1, 3, 2)
(1, 3, 2, 4)	(2, 3, 1, 4)	(3, 2, 1, 4)	(4, 2, 1, 3)
(1, 3, 4, 2)	(2, 3, 4, 1)	(3, 2, 4, 1)	(4, 2, 3, 1)
(1, 4, 2, 3)	(2, 4, 1, 3)	(3, 4, 1, 2)	(4, 3, 1 2)
(1, 4, 3, 2)	(2, 4, 3, 1)	(3, 4, 2, 1)	(4, 3, 2, 1)

من خلال المثال أعلاه وجدنا أن عدد تبديلات المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ هـو 24. يمكن الحصول على هذه العدد بطريقة ثانيـة بـدون جدولـة التبديـلات. بمـا أن هنـاك أربعـة احتمـالات لإشـغال الموقـع الأول فـإن الموقـع الثـاني يمكـن إشـغاله بثــلاث احتمالات، وستحصل على 3×4 طريقة لإشغال الموقعين الأول والثــالث. لمـا كـان الموقع الثالث سيشغل بطريقتين فإننا نحصل على 4.3.2 طريقة لاشغال المواقع الثلاثـة الأولى، وأخيراً، لما كان الموقع الأخير سيشغل بطريقة واحدة فقط، فإننا سنحصل على $24 = 4.3.2.1$ طريقة لاشغال المواقع الأربعة.

بصورة عامة المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ تمتلك $n! = n \,.\, (n-1) \,..\, 2.1$ تبديلة مختلفة ($n!$ يسمى مضروب n).

التعاكسات:

نرمز للتبديلة العامة للمجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ بـالرمز $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ حيـث j_1 يمثل العدد الأول في التبديلة، j_2 يمثل العدد الثاني وهكذا.

نقول أن التبديلة $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ تحتوي على تعـاكس عندمـا يوجـد عـدد كبـير يسبقه عدداً أصغر، وعدد التعاكسات في التبديلة يمكن إيجاده بالطريقة الآتية:

1. نحسب عدد الأعداد التي هي أصغر من j_1 وتأتي قبله.
2. نحسب عدد الأعداد التي هي أصغر من j_2 وتأتي قبله.
3. نستمر في طريقة الحساب هذه بالنسبة للأعداد j_3, j_4 إلى j_{n-1}.
4. مجموع الأعداد التي نحصل عليها يمثل عدد التعاكسات في التبديلة.

مثال (3):

احسب عدد التعاكسات في التبديلات التالية:

a. (5, 3, 2, 4)   b. (2, 4, 1, 3)   c. (1, 2, 3, 4)

الحل:

a. 1. عدد الأعداد التي هي أصغر من 5 وتأتي قبلها هي 3.

2. عدد الأعداد التي هي أصغر من 3 وتأتي قبلها هي 1.

3. عدد الأعداد التي هي أصغر من 2 وتأتي قبلها هي صفر.

∴ مجموع الأعداد في 1، 2، 3 هو $4 = 0 + 1 + 3$

باعتماد الطريقة في (a) نفسها، نحصل على:

b. مجموع التعاكسات 3.

c. مجموع التعاكسات صفر.

تعريف (2-1-2):

يقال للتبديلة بأنها زوجية إذا كان المجموع الكلي للتعاكسات فيها عدد زوجي وتسمى فردية إذا كان المجموع الكلي للتعاكسات عدد فردي.

مثال (4):

احسب عدد التعاكسات والتبديلات الزوجية والفردية لما يلي:

(1, 4, 3, 2) , (4, 3, 2, 1) , (3, 4, 2, 1) , (2, 3, 1, 4) , (1, 2, 4, 3)

الحل:

التبديلة	عدد التعاكسات	التصنيف
(1, 2, 4, 3)	1	فردية
(2, 3, 1, 4)	2	زوجية
(3, 4, 2, 1)	5	فردية
(4, 3, 2, 1)	6	زوجية
(1, 4, 3, 2)	3	فردية

تعريف (3-1-2):

الضرب البسيط من المصفوفة A التي سعتها $n \times n$ هو ضرب n من عناصر A بحيث لا يتكرر عنصرين منها من نفس الصف أو العمود.

مثال (5):

أوجد جميع حواصل الضرب البسيط للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{bmatrix}$$

الحل:

بما أن حاصل الضرب البسيط للمصفوفةA يتكون من ثلاث عوامل كل منـها يأتي من صف مختلف، فإن حاصل الضرب البسيط يمكن كتابته بالشكل:

$a_{1-}\ a_{2-}\ a_{3-}$

وبما أن حاصل الضرب لا يحتوي على عاملين متكررين من نفس العمـود فـإن الأعداد التي تمثل رقم العمود لا تتكـرر وعليـه فإنـها يجـب أن تكـون مـن تبديـلات المجموعة $\{1, 2, 3\}$. التبديلات الستة هذه تعطينا خواص الضرب البسيطة الآتية:

$a_{11}a_{22}a_{33}$ $\quad$ $a_{12}a_{21}a_{33}$ $\quad$ $a_{13}a_{23}a_{32}$

$a_{11}a_{23}a_{33}$ $\quad$ $a_{12}a_{23}a_{31}$ $\quad$ $a_{13}a_{22}a_{31}$

من الشكل أعلاه نستطيع أن نقول أن المصفوفـة A ذات السـعة $n \times n$ تحتـوي على $n!$ من حواصل الضرب البسيط ويمكن تمثيلها بالشكل:

$a_1 j_1\ \ a_2 j_2 \ldots\ldots a_n j_n$

حيث $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ تبديلة للمجموعة $\{1, 2, \ldots, n\}$

حاصل الضرب البسيط من A ذي الإشارة نعني به حاصل الضرب $a_1j_1\ a_2j_2 ....a_nj_n$ مضروباً بالإشارة + أو -. نستعمل +إذا كانت التبديلة $(j_1, j_2, .., j_n)$ زوجية و - للتبديلة الفردية.

مثال (6):

أوجد جميع حواصل الضرب البسيط ذي الإشارة للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

الحل:

الضرب البسيط بالإشارة	زوجية أو فردية	التبديلة المرافقة	الضرب البسيط
$a_{11}\ a_{22}\ a_{23}$	زوجية	(1.2.3)	$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$
$-a_{11}\ a_{13}\ a_{32}$	فردية	(1.3.2)	$a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$
$-a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$	فردية	(2.1.3)	$a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$
$a_{12}\ a_{23}\ a_{21}$	زوجية	(1.3.2)	$a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$
$a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$	زوجية	(2.1.3)	$a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$
$-a_{17}\ a_{22}\ a_{31}$	فردية	(3.2.3)	$a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$

تعريف (4-1-2):

لتكن A مصفوفة مربعة، فإن دالة المحدد، تكتب det (A)، تعرف بأنها مجموع جميع حواصل الضرب البسيط ذي الإشارة من A . الرمز det (A) يسمى محدد A، محدد A يكتب للسهولة بالشكل |A|.

طريقة حساب محدد المصفوفات ذات السعة 2 × 2 و 3 × 3

مثال (7):

أوجد محدد كل من المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{22} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

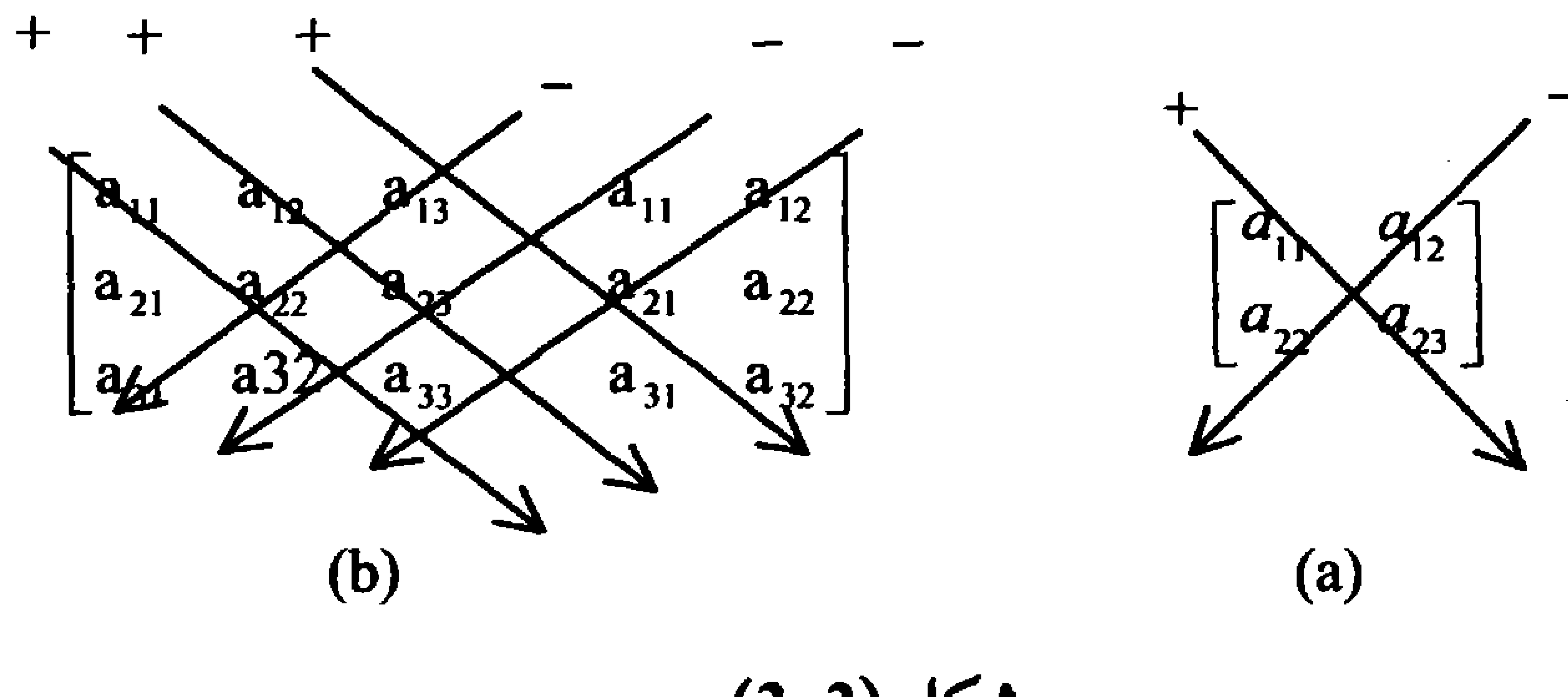
من الصعوبة أحياناً حفظ الحدود الجبرية أعلاه ولذا نقترح اعتماد الطريقة الآتية:

a. الصيغة الأولى من المثال 7 نحصل عليها من ضرب العناصر الواقعة على السهم المتجه من اليسار إلى اليمين مطروحاً منها ضرب العناصر الواقعة على السهم المتجه من اليمين إلى اليسار، لاحظ الشكل a (2-2).

b. أما الصيغة الثانية فنحصل عليها كما يلي:

1. نكتب المصفوفة ذات السعة $n \times n$ نضع بجوارها من جهة اليمين العمودين الأول والثاني لنفس المصفوفة.

2. تحسب المحدد بجمع حاصل ضرب العناصر الواقعة على الأسهم المتجه من اليسار إلى اليمين مطروحاً منها حواصل ضرب العناصر على الأسهم المتجه من اليمين إلى اليسار لاحظ الشكل b (2-2).



(b) (a)

شكل (2-2)

مثال (8):

أوجد محدد كل من المصفوفات الآتية:

$$a.\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b.\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$a.\ \det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 1 \times 3 - 2\,(-1) = 5$$

b. نرسم الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = |B| = 1\times1\times2 + 2\times3\times3 + 3\times2\times1 - 2\times2\times2 - 1\times3\times1 - 3\times1\times3$$

$$= 2 + 18 + 6 - 8 - 3 - 9$$

$$= 26 - 20$$

$$= 6$$

تنبيه:

الصيغ الموضحة في الشكل (2-2) تصلح فقط للمصفوفات ذات السعة 2×2 و 3×3 ولا تصلح للمصفوفات ذات السعة 4×4 صعوداً.

وأخيراً يمكن إيجاد محدد أي مصفوفة A ذات السعة $n \times n$ بالصيغة:

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots\ldots a_{nj_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

إذ أن الجمع Σ يؤخذ على جميع التبديلات $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ والإشارة + أو − تختار على أساس كون التبديلة زوجية أو فورية.

تمارين بند (1-2)

1. أوجد عدد التعاكسات في تبديلات المجموعة {5 ,4 ,3 ,2 1} الآتية:

a. $\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}1 & 4 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix}4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$

2. احسب محددات ما يلي:

a. $\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{6}\\ 4 & \sqrt{2}\end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -5\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -5\\ 1 & 7 & 2\end{vmatrix}$

3. بين أي من التبديلات في تمرين أعلاه، زوجية وأي منها فردية.

4. أوجد قيمة a عندما $\det(A) = 0$

a. $\begin{bmatrix}a-2 & 1\\ -5 & a+4\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}a-4 & 0 & 0\\ 0 & a & 2\\ 0 & 3 & a-1\end{bmatrix}$

5. كون صيغة لمحدد المصفوفة ذات السعة 4×4

6. أوجد قيمة x لما يلي:

$$\begin{vmatrix}x & -1\\ 3 & 1-x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & x & -6\\ 1 & 3 & x-3\end{vmatrix}$$

7. صنف تبديلات المجموعة [4 ,3 ,2 ,1} من حيث كونها زوجية أو فردية.

2-2 حساب المحددات بطريقة الاختزال الصفي:

سنبين في هذا البند كيفية إيجاد المحددات بطريقة اختزال المصفوفات صفياً إلى الشكل المدرج الصفي. هذه الطريقة مهمة لكونها تجنبنا الإطالة عند استخدام دالة المحدد.

مبرهنة (1-2-2):

لتكن A مصفوفة مربعة

1. إذا احتوت A على صف (أو عمود) جميع عناصره أصفاراً فإن $\det(A) = 0$
2. $\det(A) = \det(A^T)$

البرهان:

1. لما كان حاصل الضرب البسيط ذي الإشارة الموجبة أو السالبة من A يحتوي على عامل واحد من كل صف وعامل واحد من كل عمود، فإن كل حاصل ضرب بسيط من الضروري أن يحتوي على عامل قيمته صفر من الصف الصفري أو العمود الصفري. لذا فإن كل ضرب بسيط ستكون قيمته صفر ومن ذلك نستنتج بان $\det(A)$ الذي هو مجموع حواصل الضرب البسيط ذات الإشارة الموجبة أو السالبة، يساوي صفر.
2. البرهان غير مطلوب لأنه يعتمد على حقول أخرى يجب معرفتها ولكن نود أن نذكر أن حاصل الضرب البسيط يحتوي على عامل واحد من كل حواصل الضرب البسيط. بموجب بعض مبرهنات التبديلات يمكننا أن نبرهن أن A ومنقولتها A^T لها نفس حواصل الضرب البسيط ذات الإشارة الموجبة أو السالبة.

ملاحظة:

بواسطة المبرهنة أعلاه يمكننا استبدال كلمة صف بكلمة عمود في جميع المبرهنات المتعلقة بالمحدد.

مبرهنة (2-2-2):

إذا A مصفوفة مثلثية (عليا، سفلى أو قطرية) فإن محدد A هو عبارة عن حاصل ضرب العناصر الواقعة في القطر الرئيسي، أي:

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$$

البرهان:

لغرض تبسيط البرهان نأخذ الحالة عندما A سعتها 4 × 4. وبنفس الطريقة نبرهن الحالة العامة عندما سعة A هي n × n نفرض:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

حاصل الضرب البسيط الوحيد في A الذي لا يساوي صفر هو $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ ولإثبات ذلك، نأخذ الضرب البسيط $a_{1j_1}.a_{2j_2}.....a_{nj_n}$.

بما أن $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ فيجب أن يكون j_1 يساوي 1 لكي يكون لدينا ضرب بسيط لا يساوي صفر. إذا كان $j = 1$ فيجب أن يكون $j_2 \neq 0$ لعدم وجود عاملين من نفس العمود. إضافة لذلك لما كان $a_{23} = a_{34} = 0$ فيجب أن يكون $j_2 = 2$ لكي نحصل على ضرب لا يساوي صفر لكن $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ موجبة فإننا سنحصل على:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

مثال (1):

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$\det(A) = (-3)(7)(-1)(6) = 16$$

تمرين: هل أن منقولة المصفوفة المثلثية العليا هي مصفوفة مثلثية سفلي.

برهن ذلك.

تأثير العمليات الصفية البسيطة على المحددات:

مبرهنة (3-2-2):

لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$ فإن

1. إذا كانت المصفوفة B ناتجة من حاصل ضرب أحد صفوف (أعمدة)A بكمية ثابتة k فإن:

$$\det(B) = k \det(A)$$

2. إذا كانت B مصفوفة ناتجة من تبادل صفين (عمودين) أحدهما مكان الآخر في المصفوفة A فإن:

$$\det(B) = -\det(A)$$

3. إذا كانت B مصفوفة ناتجة من جمع مضاعف أحد صفوف (أحد أعمدة) A إلى صف آخر (عمود آخر) فإن:

$$\det(B) = \det(A)$$

البرهان:

يمكن برهان المبرهنة أعلاه باستخدام الصيغة (1) بند (2-2) لحساب المحددات المطلوبة ومن ثم التأكد من صحة المتساويان.

مثال (2):

نوضح البرهان بمثال عندما سعة A هي 3 × 3

1. نفرض $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ بضرب الصف الأول في k (k كمية ثابتة)

نحصل على المصفوفة $B = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

لذا فإن:

$$\det(B) = k \det(A)$$

2. نبادل الصفين الأول والثاني كل مكان الآخر، أي:

$$B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

إذن:

$$\det(B) = -\det A$$

3. بجمع مضاعف الصف الثاني إلى الصف الأول من المصفوفة A سنحصل على:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

عليه:

$$\det(B) = \det(A)$$

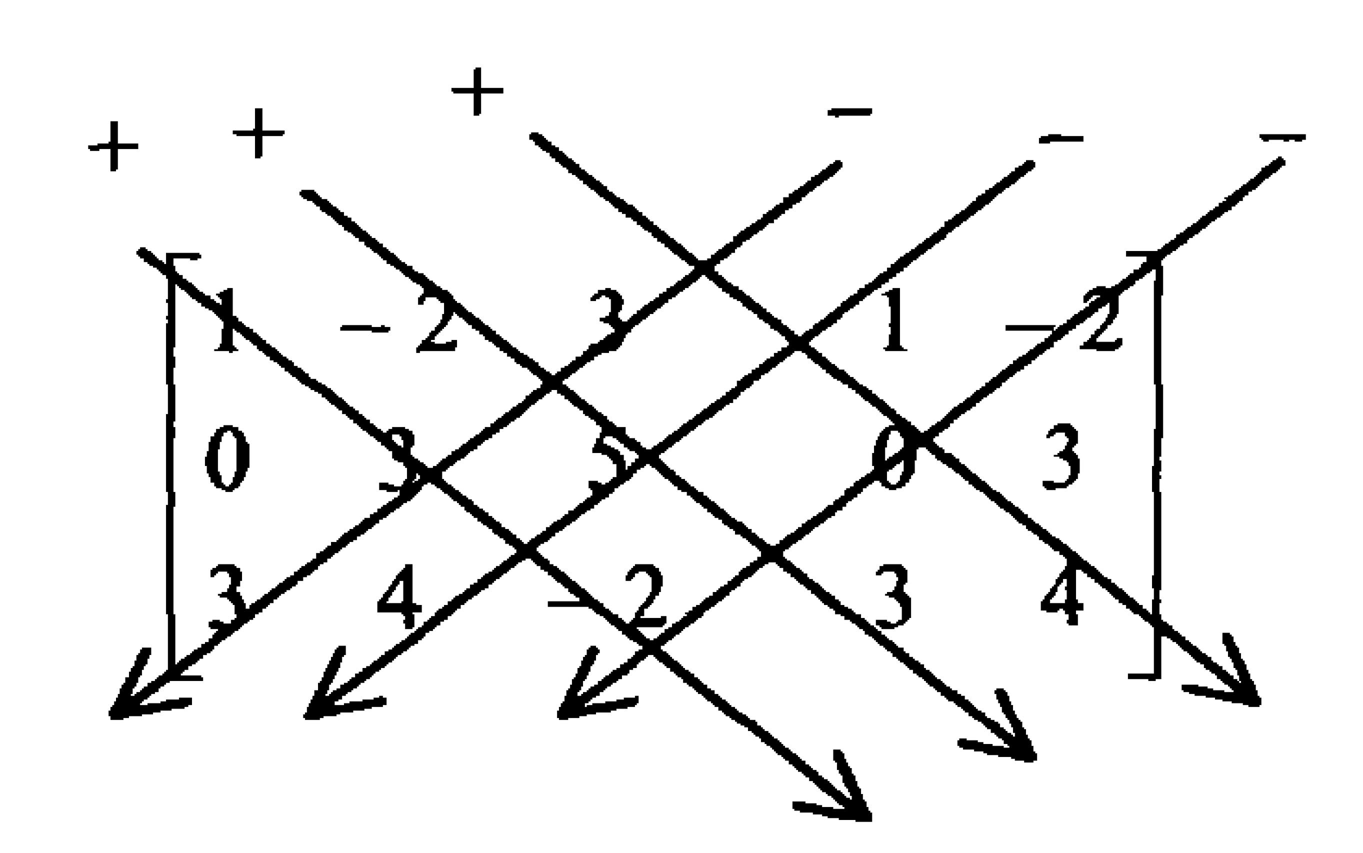
وللزيادة في التوضيح نأخذ المثال:

مثال (3):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ و $k = 2$ برهن أن إذا كانت B مصفوفة ناتجـة مـن ضرب الصف الثاني في A بالعدد 2، فإن $\det (B) = 2 \det (A)$

الحل:

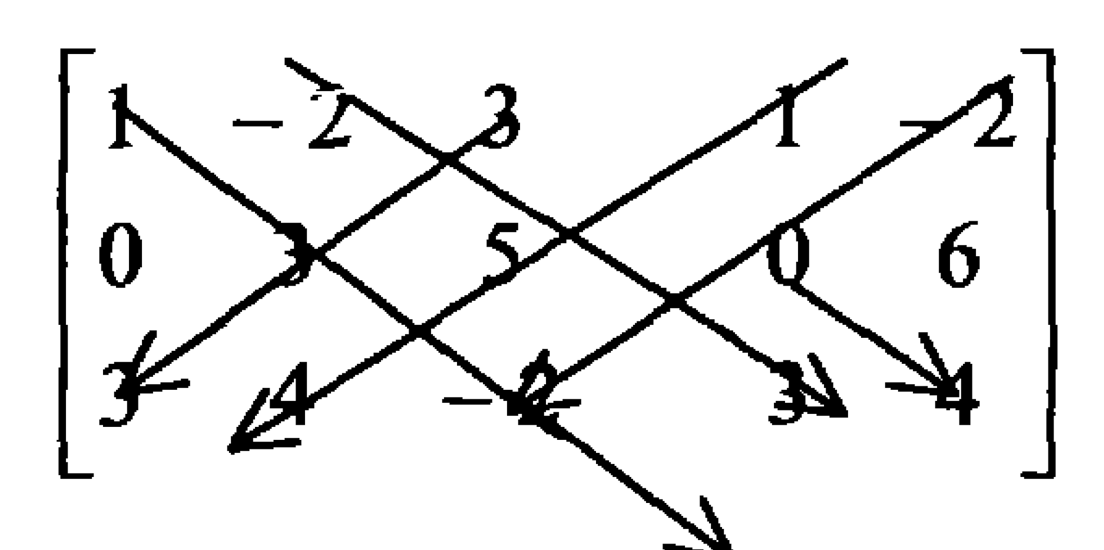
نوجد $\det (A)$:



$$\det(A) = (1)(3)(-2)+(-2)(5)(3)+(3)(0)(4) - (3\times3\times3+1\times5\times4+(-2)(0)(2))$$

$$= -6 - 30 + 0 - 27 - 20 - 0 = -83$$

نضرب الصف الثاني من A في العدد 2 نحصل على:



نفرض أن B هي المصفوفة الناتجة من ضرب الصف الثاني من A في العدد 2.

إذن:

$$\det (B) = 1.6.(-2) + (-2).10.3 + 3.0.4 - (3.6.3 + 1.10.4+(-2).0.(-2))$$

$$= 16 - 60 + 0 - 54 - 40 - 0$$

$$= -166$$

عليه فإن: $\det (B) = 2 \det (A)$

وهكذا تتحقق الخاصية الأولى من المبرهنة (2.2.3).

وبنفس الأسلوب نستطيع تحقيق الخواص الأخرى.

مبرهنة (4-2-2):

1. لتكن E مصفوفة ناتجة عن ضرب أحد صفوف I_n بثابت مثل k فإن: det (E) = k
2. إذا كانت E ناتجة من تبديل صفين من صفوف I_n كل محل الآخر، فإن det (E) = -1.
3. إذا كانت E ناتجة من ضرب أحد صفوف I_n بكمية ثابتة وإضافته إلى صف آخر من I_n فإن det (E) = 1

البرهان:

بموجب المبرهنة (3-2-2) وتعويض $A = I_n$ ستصبح B مصفوفة بسيطة.

مثال (4):

المحددات الآتية توضح المبرهنة (4-2-2):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

ضرب الصف الثاني من I_3 بالعدد 3 — تبديل الصفين الأول والثالث من I_3 كل مكان الآخر — ضرب الصف الثالث من I_3 في 4 وإضافته للصف الأول

مبرهنة (5-2-2):

إذا كان أحد صفوف المصفوفة المربعة A (أو أحد أعمدتها) هو عبارة عن مضروب صف آخر من صفوفها (أو عمود من أعمدتها) فإن:

det (A) = 0

البرهان:

نفرض أن أحد صفوف (أعمدة) المصفوفة المربعة A عبارة عن مضاعف مناسب لصف آخر فيمكن الحصول على صف (عمود) جميع عناصره أصفار، لكن جمع مضاعف أحد الصفوف إلى الآخر (مضاعف عمود إلى الآخر) لا يغير المحددة لذا من مبرهنة (1) (1-2-2) يجب أن نحصل على:

$$\det(A) = 0$$

مثال (5):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

لاحظ أن الصف الثاني هو عبارة عن الصف الأول مضروب في 2، للحصول على الصف الصفري نضيف ضرب الصف الأول في 2- إلى الصف الثالث.

ملاحظة:

من الممكن استخدام الشكل المدرج الصفي للحصول على المحددات وذلك بتحويل المصفوفة المعينة إلى مصفوفة مثلثية عليا باستخدام عمليات الصف البسيطة ومن ثم نجد المحدد للمصفوفة المثلثية العليا (مبرهنة 2-2-2).

مثال (6):

احسب $\det(A)$ حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

الحل:

نحول المصفوفة A للشكل المدرج الصفي ومن ثم نعتمـد على المبرهنـة (2-2-2) للحصول على محدد A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 11 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (1)\ (2)\ (-2) = -4$$

تمارين بند (2-2)

1. أوجد محدد المصفوفات الآتية بمجرد النظر، مبينا السبب

$$a.\ \begin{bmatrix} 2 & -15 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad b.\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c.\ \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad d.\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

2. حول المصفوفات الآتية إلى الشكل المدرج الصفي، ثم أوجد محدداتها

$$a.\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad b.\ \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad c.\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. إذا كانت $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -4$ أوجد:

$$a.\ \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & l \end{vmatrix} \qquad b.\ \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ 3g & 3h & 3k \end{vmatrix} \qquad c.\ \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+k \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

2-3 خواص دالة المحدد:

يتضمن هذا البند بعض الخواص المهمة لدالة المحدد.

الخاصية الأولى:

_لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$ و k عدد ثابت فإن:

$$\det(kA) = k^n \det(A) \quad \text{.......} \quad (1)$$

البرهان: بما أن كل عامل مشترك في اي صف من صفوف A يمكن إخراجه خارج المحدد (مبرهنة 3-2-2 (1)) ولما كان عدد صفوف A هو n وإن كل صف فيه عامل مشترك k فإن:

$$|kA| = k^n |A|$$

مثال (1):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = 2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

الحل:

$$|A| = 2(3) + 2 = 7$$

$$|B| = 24 + 4 = 28 = 2^2 . 7$$

عليه:

$$|B| = 2^2 |A| = 4 |A|$$

الخاصية الثانية:

إذا كانت A و B مصفوفتان مربعتان فإن:

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

بصورة عامة.

البرهان:

سنوضح العلاقة أعلاه بمثال:

مثال (2):

نفرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

فإن $\det (A) = -7$ و $\det (B) = 8$

كذلك $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ و $\det (A + B) = -20$

واضح أن $\det (A + B) \neq \det (A) + \det (B)$

الخاصية الثالثة:

لتكن A و B مصفوفتان مربعتان ولهما نفس السعة فإن:

$\det (AB) = \det (A) . \det (B)$ .... (2)

البرهان:

ليس من السهولة برهان هذه الخاصية، إذ يجب معرفة بعض النتائج الإضافية. لذا سنكتفي بمثال توضيحي.

نفرض A و B مصفوفتان سعة كل منهما 2 × 2 حيث:

$A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

إذن:

$\det (A) . \det (B) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12}) (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{22})$

$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{23} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

لذا:

$\det(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})$
$(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})$

وبالضرب وفتح الأقواس واختصار الحدود المتشابه نحصل على:

$d(AB) = \det(A) . \det(B)$

مثال (3):

نفرض $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ حقق صحة الخاصية الثالثة.

الحل:

$\det(B) = -8 \quad , \quad \det(A) = 16$

نحسب:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 11 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -18 \end{bmatrix}$$

$\det(AB) = -128 = (16)(-8) = \det(A) - \det(B)$

مبرهنة (1-3-2):

المصفوفة المربعة A قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا $\det(A) \neq 0$

البرهان:

نفرض أن A قابلة للانعكاس أي أن $AA^{-1} = 1$ إذن

$\det(AA^{-1}) = \det(A) + \det(A^{-1})$

$= \det(I_n) = 1$

ومن هنا نستنتج أن: $\det(A) \neq 0$

وبـالعكس نفـرض $\det(A) \neq 0$ ولتكـن S هـي الشـكل المـدرج الصفـي للمصفوفة A.

بما أن S يمكن الحصول عليها بواسـطة سلسـلة منتهيـة مـن العمليـات الصفيـة البسيطة أي يمكننا إيجاد مصفوفات بسيطة $E_1, E_2, \dots, E_n$ بحيث:

$$E_n \dots E_2 E_1 A = S$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots = E_n^{-1} S$$

عليه $\det(A) = \det\left(E_1^{-1}\right).\det\left(E_2^{-1}\right)\dots\det\left(E_n^{-1}\right)\det(S)$

وبما أن $\det(A) \neq 0$ فإن $\det(S) \neq 0$ هـذا يعـني ان الشـكل المـدرج الصفـي المختزل S لا يحتوي على أي صف جميع عناصره أصفار. لذا فإن $S = I$ إذن معكـوس المصفوفة A موجود ويساوي

$$A^{-1} = E_n \dots E_2 E_1$$

الخاصية الرابعة:

إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس سعتها $n \times n$ فإن

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

البرهان:

بما أن $AA^{-1} = I$ فإن $\det(A^{-1}A) = \det(I)$

ينتج من ذلك: $\det(A^{-1}).\det(A) = 1$

ولما كان $\det(A) \neq 0$

لذا $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (بالقسمة على $\det(A)$)

مبرهنة (2-3-2):

لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$ فإن الصيغ الآتية متكافئة.

1. A قابل للانعكاس.
2. $AX = 0$ له حل واحد فقط هو الحل الصفري.
3. الشكل المدرج الصفي المختزل للمصفوفة A هو I_n.
4. A تكتب كحاصل ضرب عدد محدود من المصفوفات الأولية.
5. $AX = B$ نظاما متسقا لكل B ذات السعة $n \times 1$.
6. $AX = B$ له بالضبط حل واحد لكل B ذات السعة $n \times 1$.
7. $\det(A) \neq 0$

البرهان:

لاحظ المبرهنات (4-6-1) و (1-3-2)

تمارين بند (3-2)

1. لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

تحقق من صحة العلاقة: $|AB] = |A| . |B|$

2. وضح لماذا $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & -10 \end{vmatrix} = 0$

3. برهن أي من المصفوفات الآتية قابلة للانعكاس ولماذا

a. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

4. نفرض سعة A هي 3 × 3 وإن $|A| = -5$. أوجد

a. $|2A|$ b. $|3A^{-1}|$ c. $|A^{-1}|$

5. احسب محدد ما يأتي:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

6. بفرض $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. احسب:

a. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

7. ما هي قيمة a بحيث تكون المصفوفة $\begin{bmatrix} a & -3 \\ 4 & 1-a \end{bmatrix}$ قابلة للانعكاس.

8. بين أن $x = 0$, $x = 2$ تحقق $\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

2-4 النشر بواسطة العامل المرافق، قاعدة كرامر:

نتطرق في هذا البند إلى طريقة مهمة ومفيدة لحساب المحددان، ونتيجة لعملنا هنا سنحصل على صيغة لمعكوس المصفوفة القابلة للانعكاس، إضافة إلى صيغة لحل أنظمة خطية معينة بلغة المحددات.

تعريف (1-4-2):

مصغر العنصر a_{ij} في المصفوفة المربعة، يكتب، M_{ij}، هو محدد المصفوفة الجزئية الناتجة من حذف الصف رقم i أو العمود رقم j في المصفوفة A العدد $(-1)^{i+j} M_{ij}$، يكتب C_{ij}، يعرف بأنه العامل المرافق للعنصر a_{ij}.

ملاحظة:

نلاحظ من خلال التعريف أعلاه أن المصغر والعامل المرافق للعنصر a_{ij} يختلفان فقط بالإشارة أي أن، $C_{ij} = \pm M_{ij}$

وبما أن الإشارات تأتي بشكل متناوب وأن إشارات القطر الرئيسي دائما موجبة ولسهولة حفظ هذه الإشارات ومواقعها يمكننا عمل الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$$

فمثلا $C_{11} = M_{11}$,$C_{21} = -M_{21}$,$C_{22} = M_{22}$ $C_{12} = -M_{12}$.

مثال (1):

نفرض $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

المصغر للعنصر a_{11} هو

$M_{11} = = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 15 = 13$ (نحذف الصف الأول والعمود الأول).

أما العامل المرافق للعنصر a_{11} فهو:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 13$$

بنفس الطريقة مصغر العنصر a_{32} هو:

$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19$ (نحذف الصف الثالث والعمود الثاني)

العامل المرافق للعنصر a_{32} هو:

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)(19) = -19$$

النشر بالعوامل المرافقة:

من المثال (7) بند (1-2) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

فإن:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad \text{.....(1)}$$

أي:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

ولما كانت المقادير المحصورة بين قوسين تمثل العوامل المرافقة C_{31}, C_{21}, C_{11} على التوالي، فإن:

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31} \quad \text{.......... (2)}$$

تبين المعادلة أعلاه ان محدد A يمكن إيجاده بجمع نواتج ضرب عناصر العمود الأول للمصفوفة A في مرافقاتها ومن ثم جمع نواتج الضرب.

طريقة حساب محدد A هذه تسمى النشر بالعوامل المرافقة بواسطة العمود الأول.

مثال (3):

نفرض $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ احسب $|A|$ باستخدام طريقة النشر بالعوامل المرافقة بدلالة الصف الأول.

الحل:

نجد العوامل المرافقة لعناصر الصف الأول في A.

$C_{13} = (-1)^{1+3}\, M_{13} = -31 \quad , C_{12} = (-1)^{1+2}\, M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 34, \; C_{11} = (-1)^{1+1}$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$

عليه:

$$\det(A) = |A| = 3.4 + (-1).34 + 2.(-31)$$

لذا:

$$\det(A) = -84$$

ملاحظة:

1. يمكن إجراء النشر بالمرافق بدلالة أي صف أو أي عمود من المصفوفة A.
2. بالإمكان تعميم المعادلة (1) للمصفوفة A التي سعتها $n \times n$.
3. ان أفضل طريقة للنشر تتم بدلالة الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار فإذا كان $a_{ij} = 0$ ففي هذه الحالة لا نحتاج للمقدار C_{ij}

مثال (3):

احسب محدد المصفوفة A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

يمكن أن ننشر بواسطة هذا الصف ← (الصف الثالث)

يمكن النشر بهذا العمود ↑ (العمود الثاني)

لاحظ أن من الأفضل النشر بدلالة الصف الثالث أو العمود الثاني لأن كل منهما يحتوي على أكبر عدد من الأصفار. نحسب المحدد بدلالة الصف الثالث.

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + 0.C_{32} + 0.C_{33} + a_{34}C_{34}$$

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{34}C_{34}$$

$$= (-1)^{3+1}(3)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}(3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

والآن ننشر C_{31} بدلالة العمود الأول فنحصل على:

$$C_{31} = (-1)^{3+1\,.\,2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\,.\,2\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,.\,2\,.\,9 + (-1)\,.\,2\,.\,(-1) = 20$$

والآن ننشر C_{34} بدلالة الصف الثالث.

$$C_{34} = (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-2) \cdot 10$$

$$= 16 - 20 = -4$$

وبالتعويض في المعادلة (2) نحصل على:

$$\det(A) = 1 \cdot 3 \cdot 20 + (-1)(-3)(-4)$$

$$= 60 - 12 = 48$$

النتائج التي حصلنا عليها بالنسبة للمصفوفة التي سعتها 3×3 تمثل حالة خاصة من المبرهنة العامة الآتية والتي سنذكرها بدون برهان.

مبرهنة (2-4-2):

يمكن حساب محدد المصفوفة التي سعتها $n \times n$ ، بجمع حاصل ضرب عناصر أي صف (عمود) بعواملها المرافقة.

أي أن لكل $1 \leq i , j \leq n$

$$\det(A) = a_{1j} c_{1j} + a_{2j} c_{2j} + \ldots + a_{nj} c_{nj}$$

هذه العلاقة تمثل نشر العوامل المرافقة بدلالة العمود j.

أما

$$\det(A) = a_{i1} c_{i1} + a_{i2} c_{i2} + \ldots + a_{in} c_{in}$$

فتمثل النشر بدلالة الصف رقم i.

تعريف (2-4-3):

إذا A مصفوفة سعتها $n \times n$ و c_{ij} العامل المرافق للعنصر a_{ij}، فمصفوفة العوامل المرافقة هي:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة المصاحبة لـ A، يرمز لها adj (A)، هي منقولة مصفوفة العوامل المرافقة. أي:

$$adj\ (A) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n2} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال (4)

لتكن $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$، أوجد adj (A)

الحل:

العوامل المرافقة لعناصر A هي:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -18 \quad , \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 17 \quad , \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad , \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -10 \quad , \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -8$$

لذا فمصفوفة المرافقات هي:

$$\begin{bmatrix} -18 & 17 & -6 \\ -6 & -10 & -2 \\ -10 & -1 & 28 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المصاحبة لـ A هي:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -1 & 28 \end{bmatrix}$$

مبرهنة (3-4-2):

إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس فإن:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

البرهان:

نبرهن أولا أن $A.\text{adj}(A) = |A| . I_n$

باستخدام قاعدة ضرب المصفوفات نحصل على:

$$A.\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف رقم i والعمود j في حاصل الضرب $A.\text{adj}(A)$ هو:

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \ldots + a_{in}C_{jn} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

إذا كان $i = j$ فإن (4) تمثل النشر بالعامل المرافق لمحدد A بدلالة الصف رقم i في المصفوفة A (مبرهنة 2-4-2).

أما إذا $i \neq j$ فإن (4) يجب أن تساوي صفر لأن العناصر a's والعوامـل المرافقـة تأتي من صفوف A المختلفة. عليه فإن قيمة (4) تساوي صفر.

لذلك:

$$A\,.adj\,(A)=\begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I_n \;\dots\dots\dots\dots\; (5)$$

بما أن A قابلة للانعكاس $|A| \neq 0$ لذا فالمعادلة (5) يمكن كتابتها:

$$\frac{1}{\det(A)}[A.adj(A)] = I_n$$

أو

$$A\left[\frac{1}{\det(A)}.adj(A)\right] = I_n$$

بضرب طرفي المعادلة من اليسار في A^{-1} نحصل على:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.adj(A) \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; (6)$$

مثال (5):

استخدم الصيغة (6) لإيجاد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

الحل:

نوجد محدد A أولا باستخدام العلاقة (6) والمثال (3):

$$\det(A) = |A| = 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -54 - 34 - 6 = -94$$

وهكذا:

$$A^{-1} = \frac{-1}{94}\begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/94 & 6/94 & 10/94 \\ 17/94 & 10/94 & 1/94 \\ 6/94 & 2/94 & 28/94 \end{bmatrix}$$

مثال (6):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ احسب A^{-1} إن وجدت مستخدما العلاقة (3).

الحل:

1. نحسب محدد A:

$$\det(A) = 2 \times 3 - (-4)(1) = 6 + 4 = 10$$

بما أن محدد A يساوي 10، فإن A قابلة للانعكاس.

2. نجد المصفوفة المرافقة

$C_{11} = (-1)^{1+1}\, 3 = 3$ $\qquad$ $C_{12} = (-1)^{1+2}\,(1) = -1$

$C_{21} = (-1)^{2+1}\,(-4) = 4$ $\qquad$ $C_{22} = (-1)^{2+2}\,(2) = 2$

3. مصفوفة المرافقات: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

4. عليه $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (المصفوفة المصاحبة)

5. نستخدم العلاقة

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.\text{adj}(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/10 & 4/10 \\ -1/10 & 2/10 \end{bmatrix}$$

التحقيق: $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/10 & 4/10 \\ -1/10 & 2/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

وبنفس الطريقة : $A^{-1}A = I_2$

قاعدة كرامر:

المبرهنة التالية ستقدم صيغة أخرى من الصيغ المهمة في حل أنظمة المعادلات الخطية التي تحوي على n من المعادلات و n من المتغيرات هذه الطريقة مهمة أيضا من خلال دراسة خواص حلول الأنظمة الخطية دون الحاجة للدخول في تفاصيل الحل الطويلة.

مبرهنة (2-4-4): ليكن $AX = B$ نظام خطي يحتوي على n من المعادلات و n من المتغيرات بحيث أن $\det(A) \neq 0$، فإن هناك حلا وحيدا للنظام. هذا الحل هو:

$$x_n = \frac{|A_n|}{|A|}, \dots, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

حيث ان A_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ هي المصفوفة التي نحصل عليها باستبدال عناصر العمود رقم j في المصفوفة A بعناصر المصفوفة B حيث:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

البرهان:

بما أن $|A| \neq 0$، فإن A قابلة لانعكاس، وبموجب مبرهنة $X = A^{-1}B$ هو الحل الوحيد للنظام $AX = B$

لذا وبموجب المبرهنة (2-4-3) نحصل على:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{|A|}\text{adj}(A).B$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1}\\c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n1}\\\vdots & \vdots & & \\c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

وبضرب المصفوفات

$$=\frac{1}{|A|}.\begin{bmatrix}b_1C_{11}+b_2C_{21}+\dots+b_nC_{n1}\\b_1C_{12}+b_2C_{22}+\dots+bnC_{n2}\\\vdots \qquad \vdots\\b_1C_{1n}+b_2C_{2n}+\dots+b_nC_{nn}\end{bmatrix}$$

العنصر في الصف رقم j في المصفوفة X هو:

$$x_j=\frac{b_1C_{1j}+b_2C_{2j}+\dots+b_nC_{nj}}{\det(A)} \quad \dots\dots\dots (7)$$

والآن لتكن:

$$A_j=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1}b_1a_{ij+1} & \dots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1}b_3a_{2j+1} & \dots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & & & \\a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1}b_na_{nj_{n1}} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

بما أن A_j تختلف عن A فقط في العمود j، فإن العوامل المرافقة للعناصر $b_1, b_2, \dots. b_n$ في A_j هي نفسها العوامل المرافقة المقابلة لعناصر العمود j في A.

لذا بنشر المحدد $|A_j|$ بعناصر العمود رقم j نحصل:

$$\det(A_j)=b_1cij+b_2c_{2j}+\dots+b_nc_{nj}$$

بتعويض هذه النتيجة في: (7) نحصل على:

$$x_J = \frac{|Aj|}{|A|}$$

مثال (7):

باستخدام قاعدة كرامر حل النظام الخطي:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$-2x_1 - x_2 + x_3 = -3$$

الحل:

نجد محدد المصفوفة A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$ (برهن ذلك)

وباستخدام قاعدة كرامر:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = 4, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 3, x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

مثال (8):

حل النظام الآتي:

$$2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 20$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

الحل:

نجد محدد A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -140$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 20 \\ -2 & 2 & -2 \\ 11 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-140} = \frac{-560}{-140} = 4, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 20 & 6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix}}{-140} = \frac{140}{-140} = -1, x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-140} = 2$$

تمارين (4-2)

1. لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ احسب المصغرات والعوامل المرافقة للمصفوفة A.

2. احسب محدد A أعلاه بواسطة نشر العوامل المرافقة بدلالة

a. العمود الأول   b. الصف الثالث   c. العمود الثالث

3. أوجد |A| بطريقة نشر العوامل المرافقة لما يلي:

$$b.\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad a.\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

4. إذا كانت A كما في السؤال 3. احسب adj (A).

5. لتكن A مصفوفة سعتها 2 × 2 برهن أن adj (adj (A)) = A.

6. أوجد معكوس كل مما يأتي:

$$b. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -7 \end{bmatrix} \qquad a. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

7. حل نظم المعادلات الخطية الآتية مستخدما قاعدة كرامر.

a.
$2x + 4y + 6z = 2$
$2z + x = 0$
$3y - z + 2x = -5$

b.
$3y + 2x = z + 1$
$3x + 2z = 8 - 5y$
$3z - 1 = x - 2y$

8. إذا كانت $|A| = 1$ وأن جميع عناصر A أعداد صحيحة فإن جميع عناصر A^{-1} أعـداد صحيحة.

9. برهـن أن معادلـة الخـط المسـتقيم المـار بالنقـاط (a_2, b_2)، (a_1, b_1) يمكـن كتابتـها بالشكل:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

10. لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$ وقابلة للانعكاس. كيف تتأثر A^{-1} إذا:

أ. أبدلنا الصف رقم i مع الصف رقم j في المصفوفة A.

ب. ضرب الصف i في A بكمية ثابتة k.

جـ. أضفنا مضروب الصف i بالثابت k إلى الصف رقم j في A.

11. لتكن A مصفوفة مثلثية سفلي قابلة للانعكاس فإن A^{-1} مصفوفة مثلثية عليا.

تمارين محلولة

1. لتكن

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&0&-2\\3&-12&-2&-6\\-2&10&2&5\\-1&6&3&3\end{bmatrix}$$

وضح فيما إذا كـانت A قابلـة للانعكـاس أم لا. إذا كـانت قابلـة للانعكـاس أوجد A^{-1}.

الحل:

باستخدام خواص المحددات

$$\begin{vmatrix}1&-3&0&-2\\3&-12&-2&-6\\-2&10&2&5\\-1&6&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\3&-3&-2&0\\-2&4&2&1\\-1&3&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-2&0\\4&2&1\\3&1&1\end{vmatrix}=-1$$

نضرب العمود الأول بـالأعداد 2.3 ونضيفه للأعمدة الثاني والرابع علـى التوالي

ننشر المحدد بوساطة الصف الأول

وضح هذه الخطوة

لذا فإن $\det(A) = -1 \neq 0$ وعليه فإن A^{-1} موجودة.

نوجد المحددات التي سعتها 3×3 والتي عددها ستة عشر أي مصفوفة المرافقات باستخدام العلاقة $C_{ij} = (-1)^{1+j}\,|M_{ij}|$

عليه فإن مصفوفة المرافقات هي

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

عليه:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

2. حل النظام الخطي التالي باستخدام قاعدة كرامر.

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2$$

$$-1x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 = -3$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1$$

الحل:

نكتب هذا النظام بالشكل $AX = B$

نوجد محدد A أولا (حيث A مصفوفة معاملات النظام أعلاه) باستخدام عمليات الصف أو العمود البسيط لتحويلها إلى مصفوفة مثلثية

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

نضرب الصف الأول في 2- ونضيفه للصف الثالث
ونضرب الصف في 3- ونضيفه للصف الرابع

نضرب الصف الثاني في 5- ونضيفه للصف الثالث
ونضرب الصف الثاني في 7- ونضيفه للصف الرابع

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix} = -16\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

نستخرج 16- من الصف الثالث (خواص المحددات)

نضرب الصف الثالث في 32 ونضيفه للصف الرابع

$$= -16\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

إذن: $|A| = -16\,(-1)(1)(10) = 160$

(لأن الصيغة الأخيرة هي مصفوفة مثلثية عليا)

الآن نستخدم قاعدة كرامر:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

إذا:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 9 & 6 \\ -1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}}{160} = \frac{-464}{160}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{160} = \frac{280}{160}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{160} = \frac{-56}{160}$$

$$x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{160} = \frac{112}{160}$$

حيث A_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ هي المصفوفة A بعد حذف العمود رقم j ووضع بديلة عمود الثوابت B.

3. لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد A^{-1}

الحل:

1. أوجد مصفوفة المرافقات كما يلي: (باستخدام الصيغة $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$)

$C_{11} = + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$ $\qquad$ $C_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{31} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

عليه فمصفوفة المرافقات:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & -11 & -1 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

2. المصفوفة المصاحبة هي منقولة مصفوفة المرافقات

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & -11 & -1 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

3. بواسطة الصيغة (5) بند (4-2):

$$\det(A) \,.\, I_3 = A \,.\, \text{adj}(A)$$

$$\det(A) = 28$$

$$A.\ \text{adj}(A) = \det(A) = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

إذن $\det(A) = 28$

4. عليه:

$$A^{-1} = \frac{adj\,(A)}{\det(A)} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & -11 & -1 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

الفصل الثالث



المتجهات في فضاء البعد الثاني وفضاء البعد الثالث

الفصل الثالث

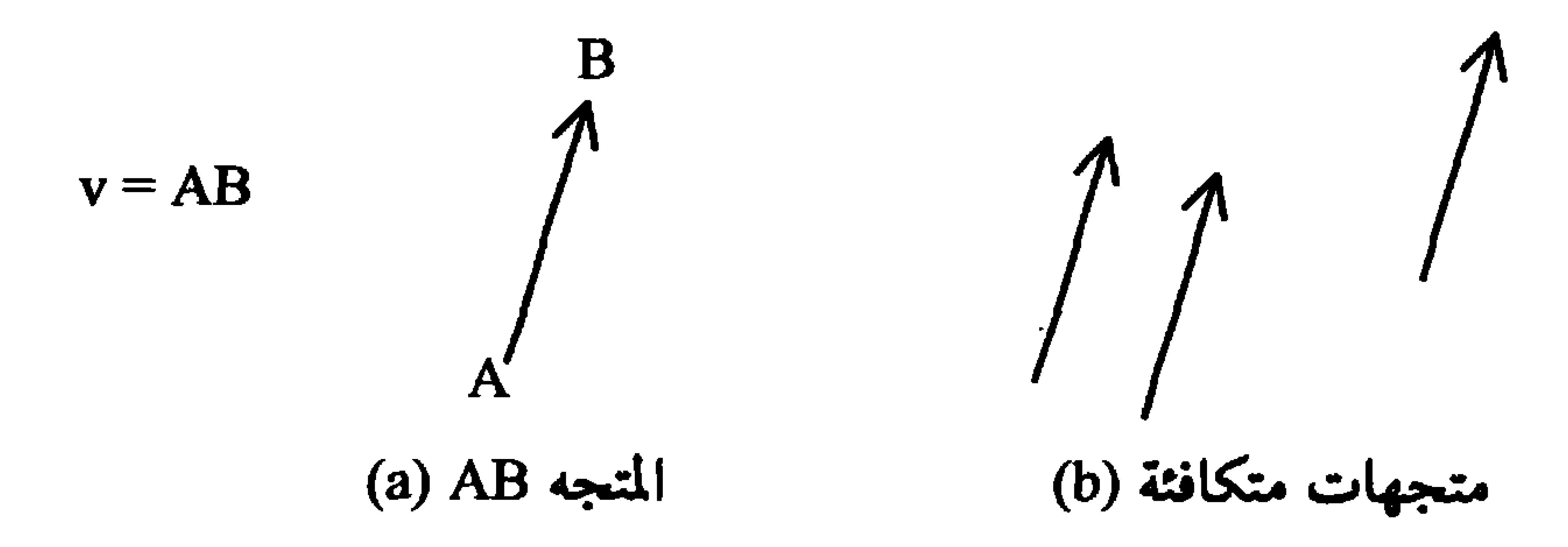
المتجهات في فضاء البعد الثاني وفضاء البعد الثالث

3-1 المقدمة والمعنى الهندسي للمتجهات:

لهذا الموضوع تطبيقات مهمة وكثيرة، فعلى سبيل المثال تظهر في الفيزياء كميات مثل المساحة، الطول، درجات الحرارة يعبر عنها بقيمتها العددية فقط. وهناك كميات أخرى يعبر عنها بقيمتها العددية واتجاهها، كالقوة والسرعة وحركة الريح فمثلاً حركة الريح يعبر عنها من خلال معرفة سرعتها واتجاهها. هذه الكميات تمثلها بشكل متجه.

المعنى الهندسي للمتجهات:

يمكن التعبير عن المتجهات بشكل خطوط مستقيمة اتجاهيه أو بشكل أسهم. السهم يمثل اتجاه المتجه أما طول السهم فيمثل قيمته. بداية السهم يقال لها نقط بداية المتجه وقمة السهم تسمى نقطة النهاية أو الرأس. في الشكل الجاور نقطة البداية للمتجه v هي النقطة A ونقطة النهاية هي B ونكتبه:



المتجه AB (a)   متجهات متكافئة (b)

شكل (1-3)

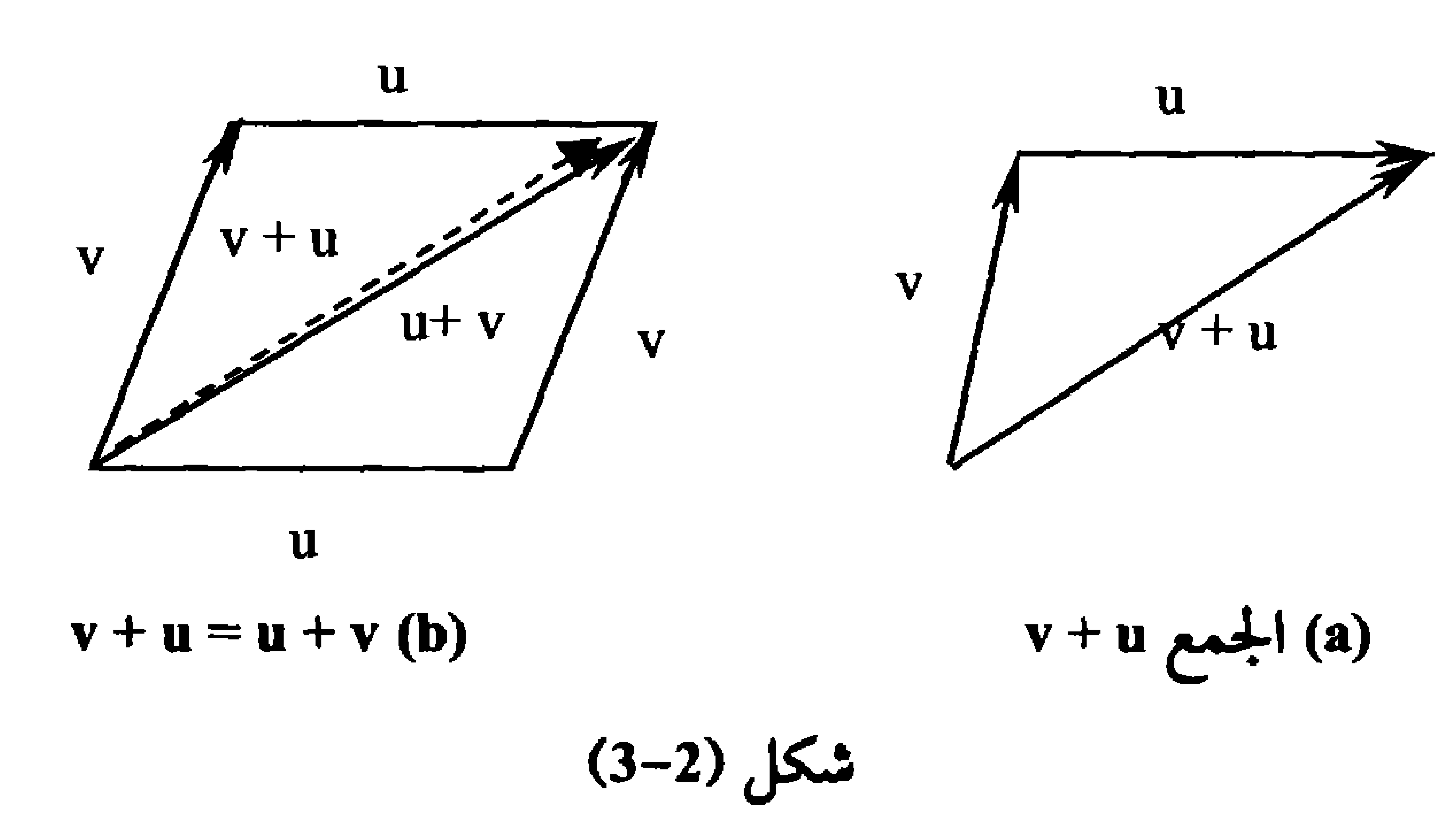
المتجهات التي لها نفس الطول والاتجاه تسمى متجهات متكافئة وتكتب $v = u$ للتعبير عن تكافؤ المتجهات v و u.

ملاحظة:

المتجه v ذي الطول والاتجاه يكتب أحياناً $\vec{v}$ والسهم يعبر عن الاتجاه. خلال هذا الكتاب سنكتب المتجه $\vec{v}$ بالشكل v ونسميه المتجه v.

تعريف (3-1-1):

إذا كانت u, v أي متجهين فإن جمعهما v + u هو متجه يعبر عنه هندسياً كما يلي: نضع نقطة بداية u على نهاية المتجه v. المتجه v + u يمثل بسهم من بداية v إلى نهاية u (لاحظ الشكل 2-3)، في الشكل (2-3) يوجد جمعان v + u و u + v وكلاهما متساويان أي، v + u = u + v والجمع يمثل هندسياً بقطر متوازي الأضلاع.



v + u = u + v (b)

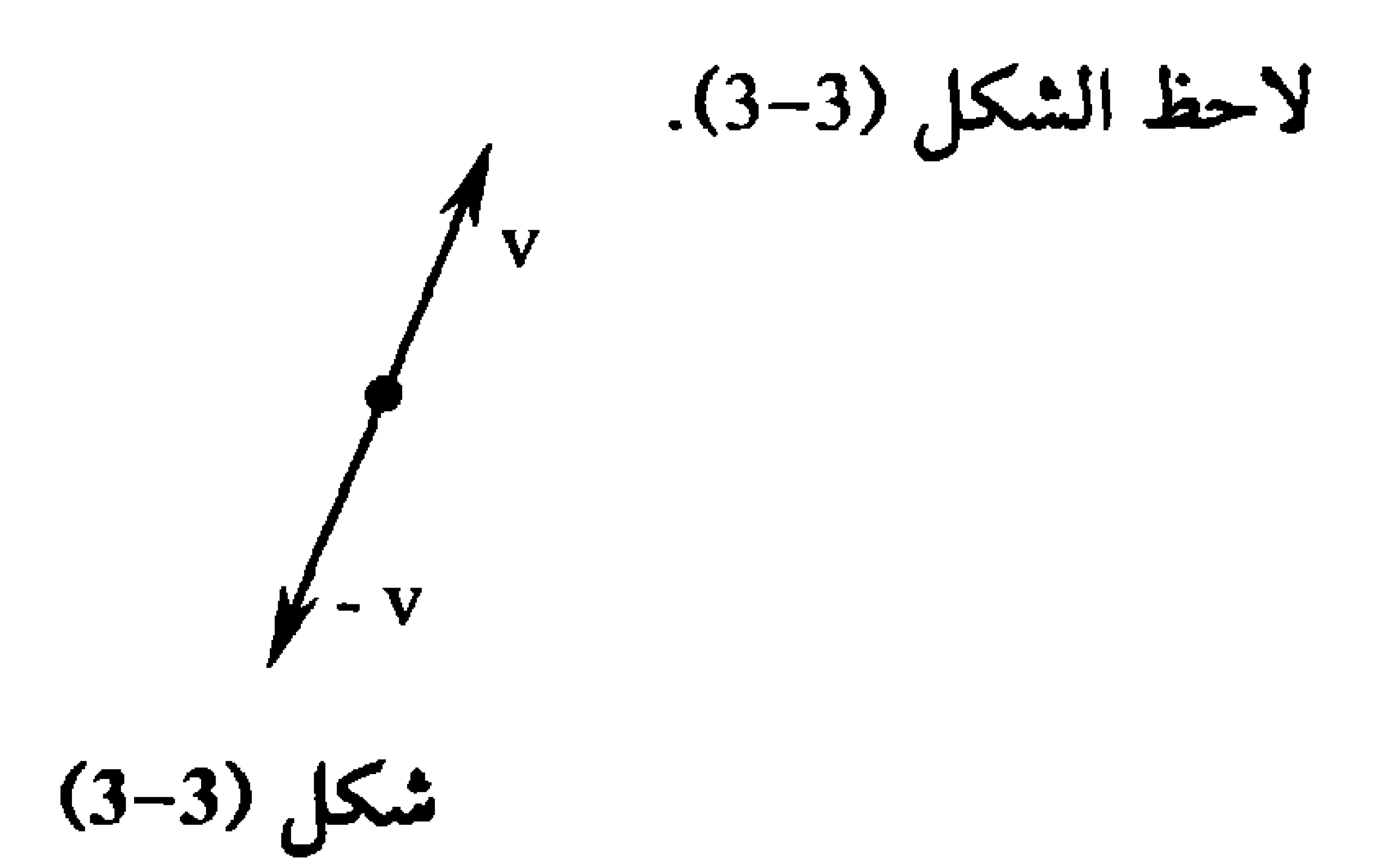
(a) الجمع v + u

شكل (2-3)

المتجه الذي طوله يساوي صفر يسمى المتجه الصفري ويكتب بالشكل 0 ويعرف v + 0 = 0 + v = v لكل متجه v.

إذا كان v متجه غير صفري فإن v- يعرف بأنه سالب v وهو متجه طوله مساوياً لطول v ولكن بعكس الاتجاه. هذا المتجه يحقق الخاصية v + (-v) = 0.

لاحظ الشكل (3-3).



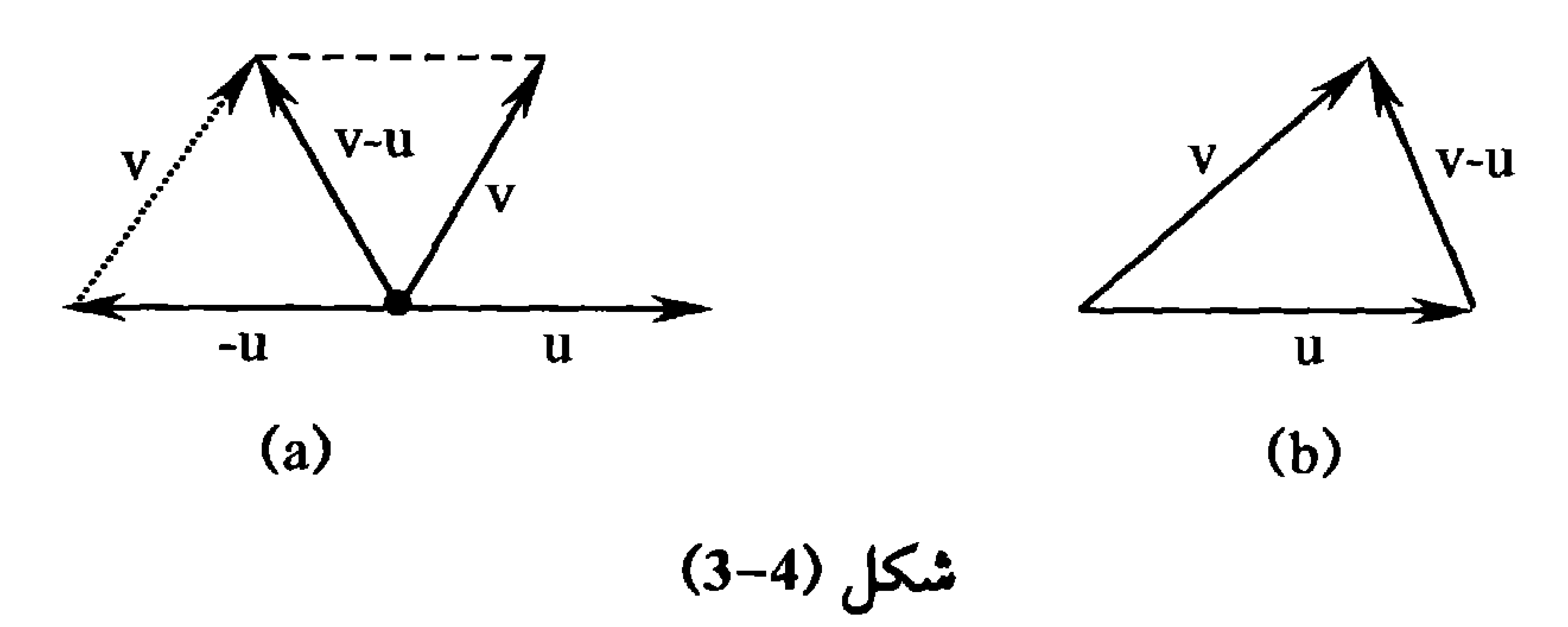
شكل (3-3)

تعريف (2-1-3):

ليكن v و u متجهين فإن الفرق بينهما يعرف بالصيغة:

$$v - u = v + (-u)$$

لاحظ الشكل b(4-3).

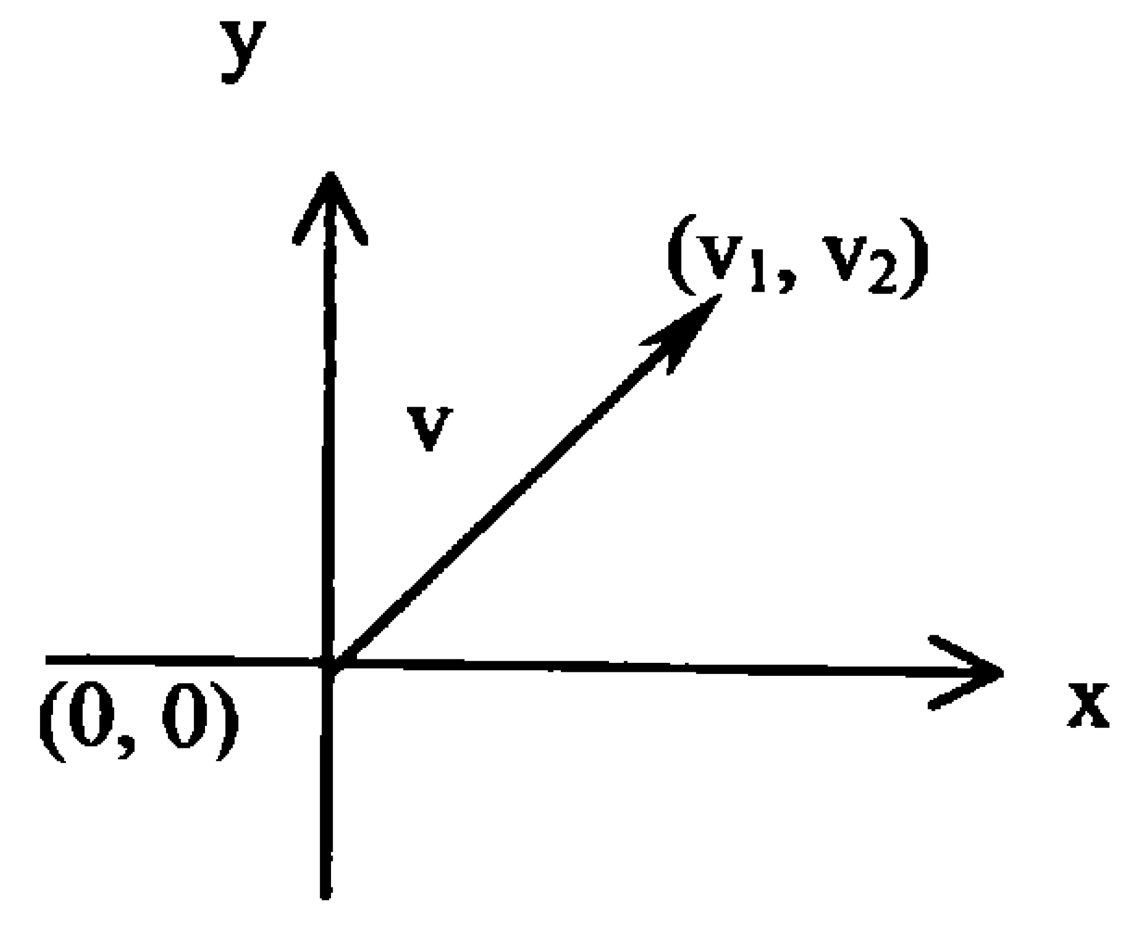


شكل (4-3)

ولتعين v - u نطابق نقطتي البداية لكل من v و u على بعضهما كما في الشكل b (3-4) المتجه الواصل بين نهاية المتجه u إلى نهاية v هو المتجه v - u.

تعريف (3-1-3): ليكن v متجه غير صفري و k كمية ثابتة (عدد حقيقي) غير صفرية فإن الضرب kv هو متجه طوله |k| مضروب طول v واتجاهه هو نفس اتجاه v، إذا كان $k > 0$. أما إذا كان $k < 0$ فاتجاهه معاكس لاتجاه v. كما ونعرف $kv = 0$ إذا كان $k = 0$ أو $v = 0$. $(-1)\,v$ هو متجه طوله يساوي طول v لكن باتجاه معاكس ويمكن كتابته $(-1)\,v = -v$.

ليكن v متجه مرسوم في المستوى ولتكـن بدايتـه نقطـة الأصـل لأي احداثيـين متعامدين، لاحظ الشكل (5-3).



شكل (5-3)

نفرض إحداثيات نقطة نهاية v هما (v_1, v_2)، يقال للإحداثيين v_1 و v_2 بمركبتي المتجه v ويكتب v بالصيغة:

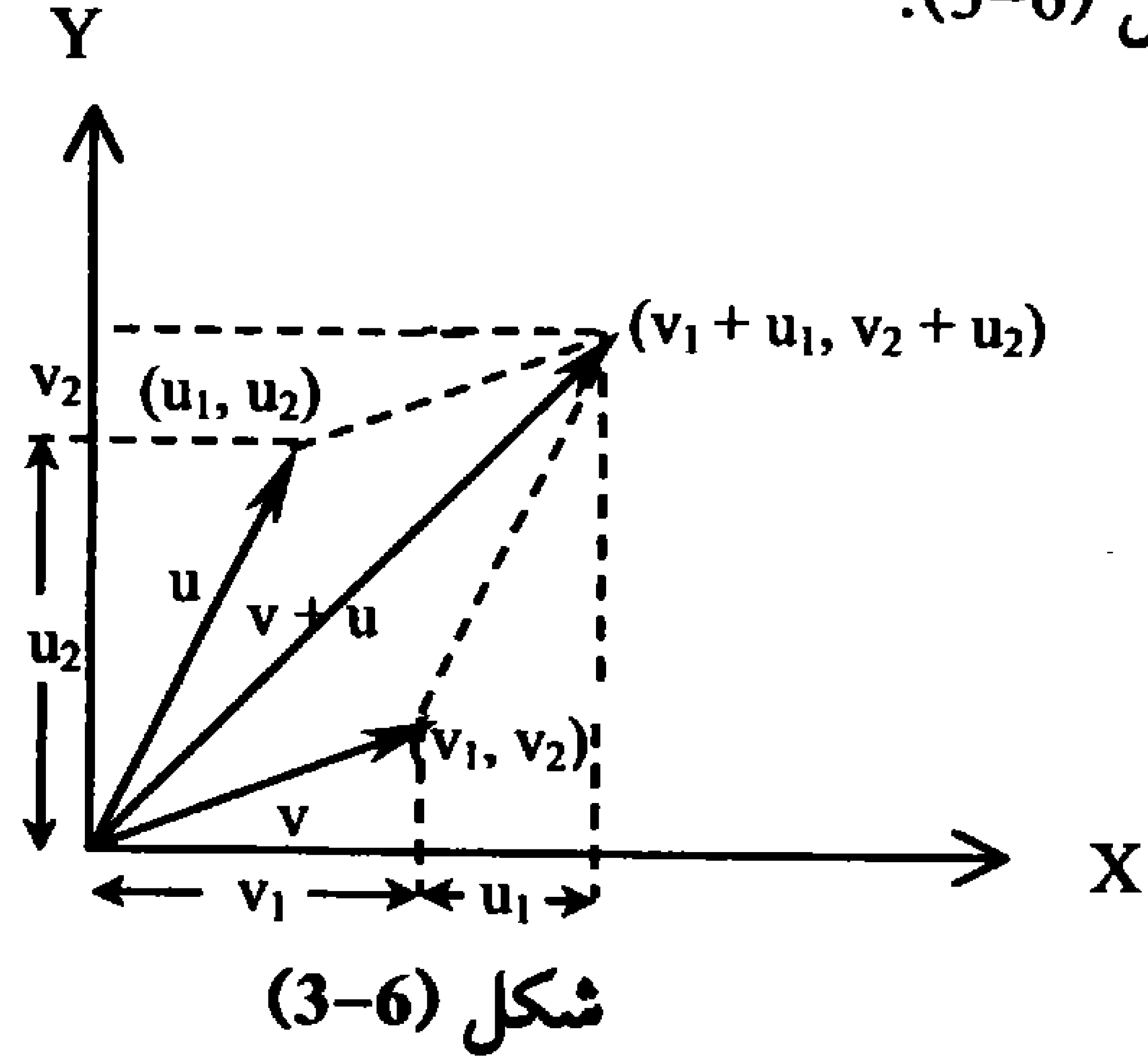
$$v = (v_1, v_2)$$

إذا كان $v = (v_1, v_2)$ و $u = (u_1, u_2)$ فإن v تكافئ u إذا وفقط إذا $v_1 = u_1$ و $v_2 = u_2$.

أما v + u فيعرف بأنه:

$$v + u = (v_1, v_2) + (u_1 + u_2) = (v_1 + u_1 , v_2 + u_2) \quad \text{.............................} \quad (1)$$

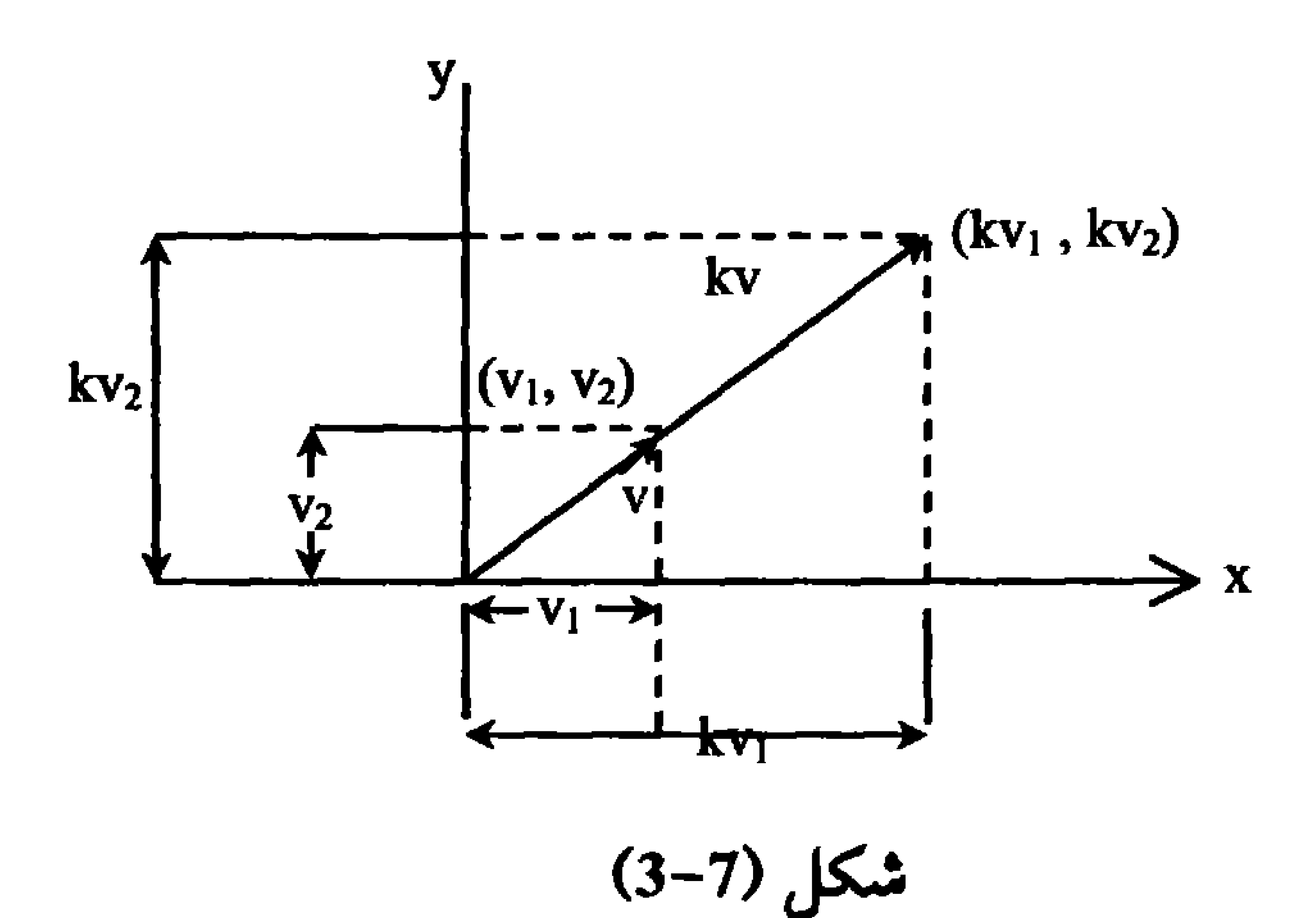
لاحظ الشكل (6-3).



شكل (6-3)

إذا كان $v = (v_1, v_2)$ و k كمية ثابتة فإن kv (شكل (3-7))

$$kv = (kv_1, kv_2) \quad \dots\dots (2)$$



شكل (3-7)

مثال (1):

لتكن $v = (-2, 1)$ و $u = (3, 4)$ فإن:

$$v + u = (-2, 1) + (3, 4) = (-2 + 3, 1 + 4) = (1, 7)$$
$$3v = 3\ (-2, 1) = [3(-2), 3(1)] = (-6.3)$$

وبما أن $v - u = v + (-1)\ u$ وباستخدام خاصيتي الجمع والضرب نحصل على:

$$v - u = (v_1 - u_1 , v_2 - u_2)$$

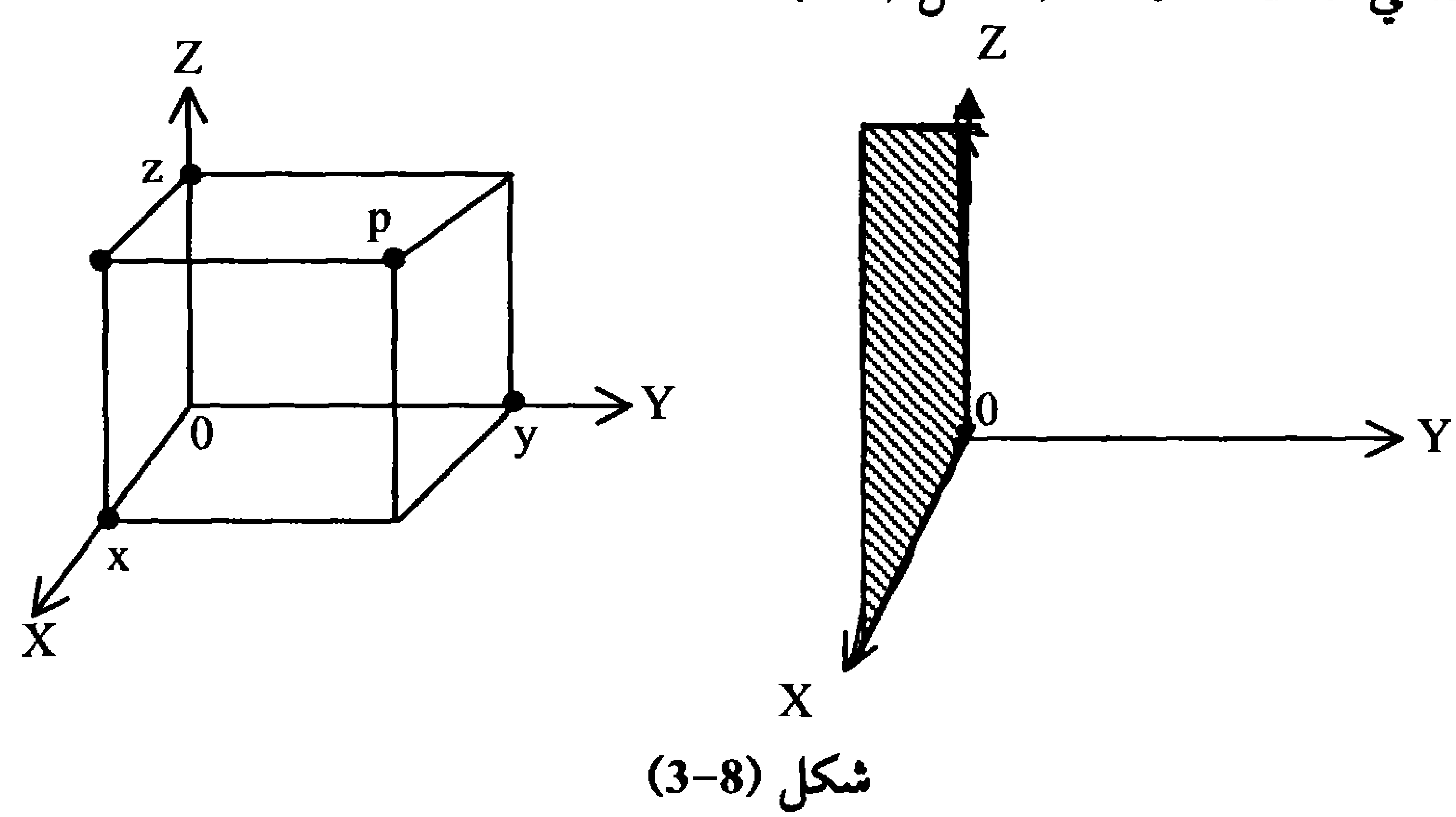
مثال (2):

لتكن v و u كما في المثال فإن:

$$v - u = (v_1 - u_1, v_2 - u_2) = (-2-3, 1-4) = (-5, -3)$$

لما كانت المتجهات في المستوى يمكن التعبير عنها بزوج من الأعداد الحقيقية فإن المتجهات المرسومة في الفضاء الثلاثي يمكن تمثيلها بثلاث من الأعداد الحقيقية وذلك من خلال تكوين نظام إحداثي ثلاثي وكما يأتي:

نعين نقطة مثل 0 ونسميها نقطة البداية ونكون ثلاث مستقيمات متعامدة تسمى المحاور الإحداثية تمر بنقطة البداية ونرمز لهذه المحاور بالرموز z, y بعد تعين الاتجاهات الموجبة واختيار وحدة قياس المسافات. لاحظ ان كل محورين يعينان مستوى يسمى المستوى الإحداثي وهي المستوى -xy، المستوى -xz و المستوى -yz. لذا فإن أي نقطة مثل P يمكن تمثيلها بالثلاثي (x, y, z) من الأعداد الحقيقية ويسمى إحداثي النقطة P، لاحظ (الشكل (8-3).



شكل (8-3)

عليه فإن إحداثي النقطة P هي x = 0x، y = 0y و z = 0z.

إذا أردنا رسم المتجه v في الفضاء الثلاثي نضع بدايته في نقطة الأصل 0، فإن إحداثيات نقطة نهايته تسمى مركبات v وتكتب:

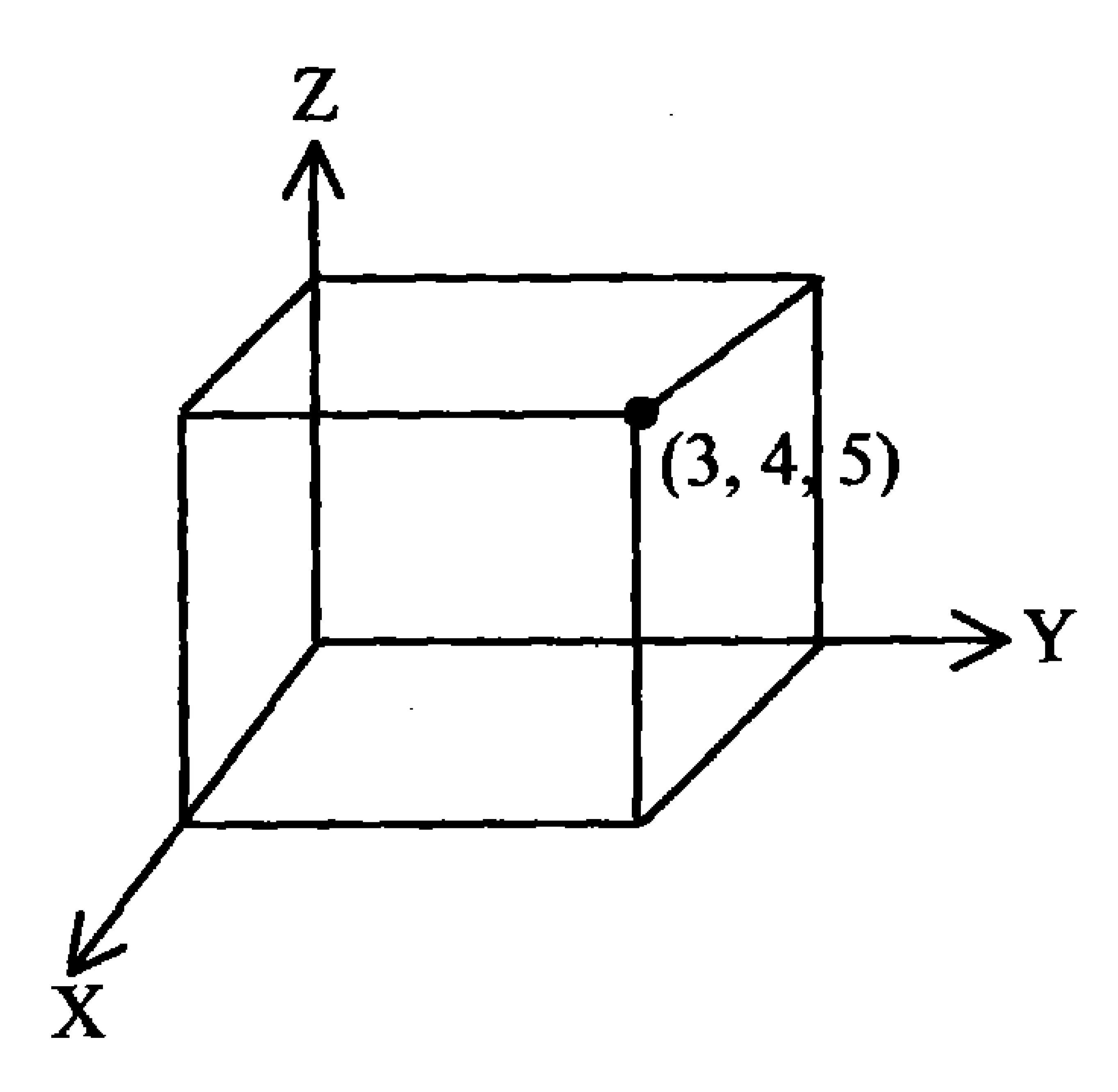
$$v = (x, y, z)$$

مثال (3):

ارسم النقطة P التي إحداثياتها (3, 4, 5)

الحل:

لاحظ الشكل (9-3).



شكل (9-3)

لتكن $v = (v_1, v_2, v_3)$ و $u = (u_1, u_2, u_3)$ متجهات في فضاء -3، فإن بالإمكان الحصول على صيغ مشابهة لتلك في فضاء -2 وهي:

1. v و u متكافئتين إذا وفقط إذا كانت $v_1 = u_1$ و $v_2 = u_2$ و $v_3 = u_3$
2. $v + u = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3)$
3. $kv = (kv_1 , kv_2 , kv_3)$

مثال (4):

نفرض أن $u = (4, 1, 2) , v = (-1, 3, 2)$

لذا:

$$v + u = (-1, 3, 2) + (4, 1, 2)$$
$$= (-1 + 4, 3 + 1, 2 + 2)$$
$$= (3, 4, 4)$$
$$3v = 3 (-1, 3, 2)$$
$$= (-3, 9, 6)$$

$-u = (-1)\,(4, 1, 2)$

$= (-4, -1, -2)$

$v - u = v + (-1)\,u$

$= (-1, 3, 2) + (-4, -1, -2)$

$= (-5, 2, 0)$

ملاحظة:

في بعض الأحيان لا تقع بداية المتجه في نقطة بداية المحاور وفي هذه الحالة تسمى بالمتجهات الحرة والمتجهات التي بدايتها تنطبق على نقطة الأصل فتسمى بالمتجهات المقيدة.

إذا كانت نقطة بداية المتجه P_1P_2 هي $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته هي $P_2\ (x_2, y_2, z_2)$ فإن المتجه P_1P_2 يعرف بالشكل:

$$P_1P_2 = (x_2 - x_1\ , y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

أي أن مركبات P_1P_2 هي عبارة عن مركبات نهايته مطروحاً منها مركبات بدايته أي:

$$P_1P_2 = 0P_2 - 0P_1 = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$$

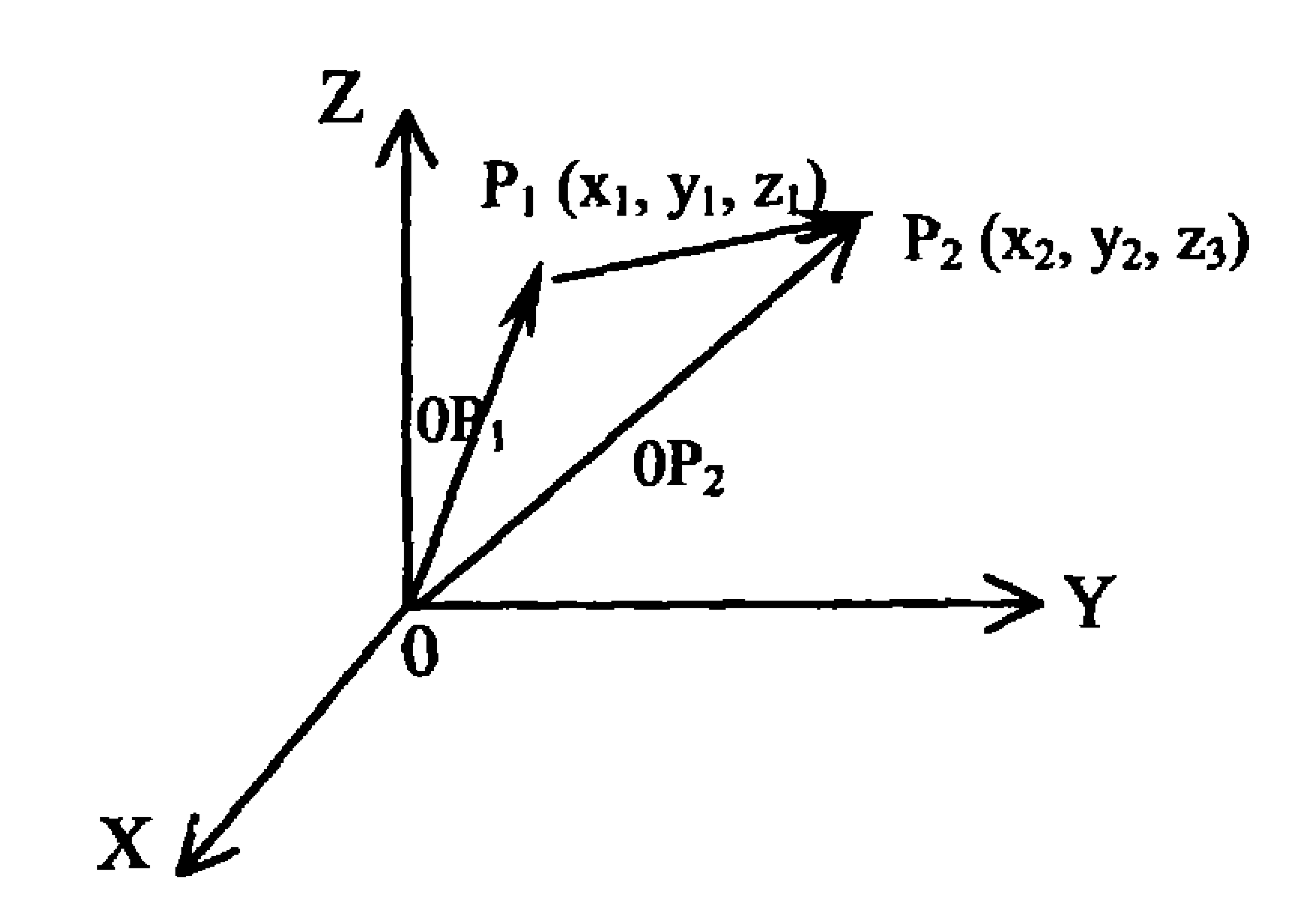
$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

مثال (5):

ليكن $v = P_1P_2$ متجه نقط بدايته النقطة $P_1\ (3, -1, 4)$ ونقطة نهايته $P_2\ (5, -2, 4)$ فإن مركباته هي:

$v = (5-3, -2-1, 4-4)$

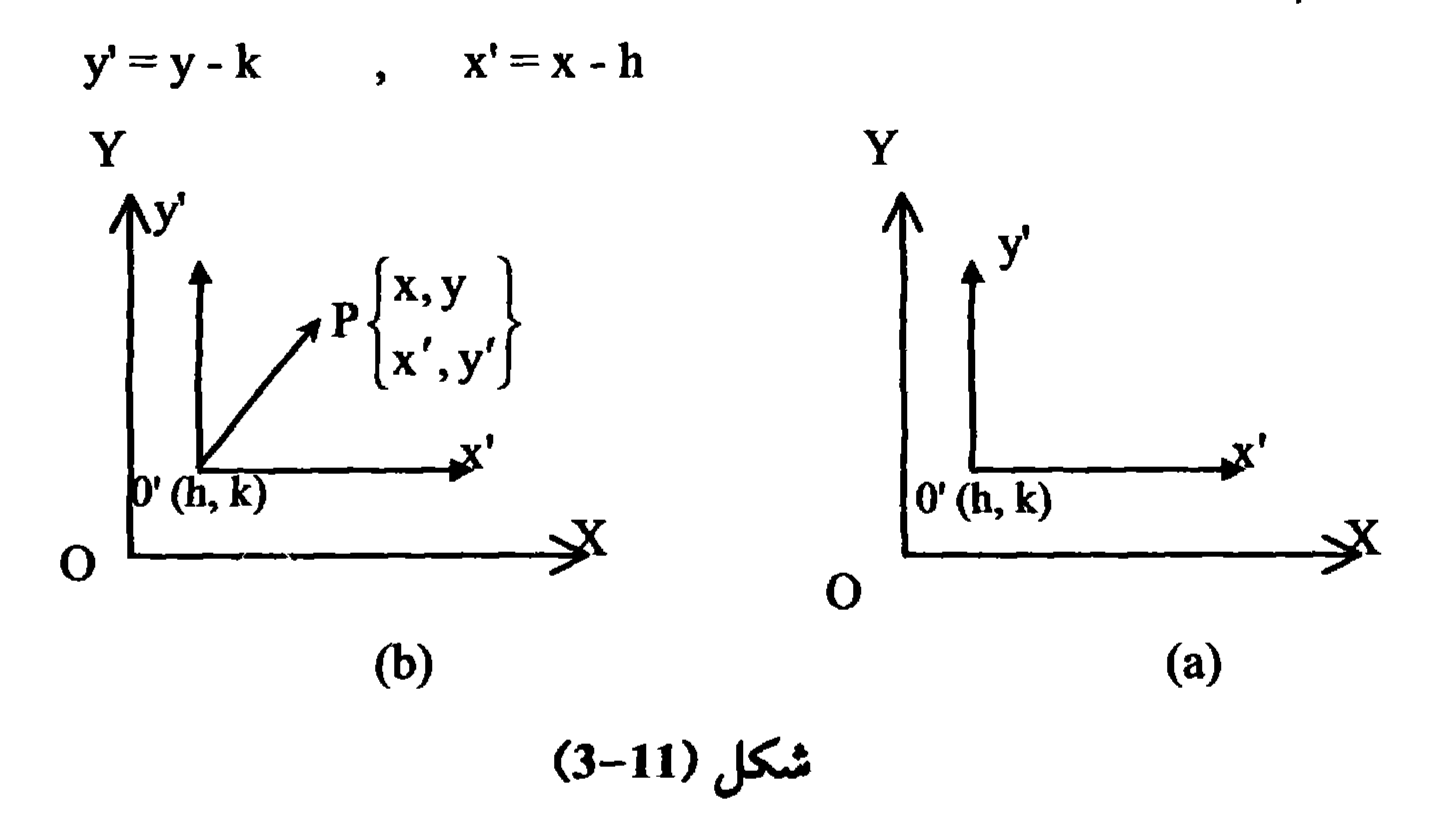
$= (2, -3, 0)$



شكل (3-10)

إزاحة المحاور: في حالات معينة حلول التمارين تحتاج القيام بإزاحة محاور الإحداثيات للحصول على محاور جديدة موازية للمحاور الأصلية ففي الشكل (3-11) قمنا بإزاحة المحاور للنظام الإحداثي -xy للحصول على النظام الإحداثي -x'y' الذي نقطة الأصل قيمة هي'0 تقع على النقطة (h, k) = (x, y). لذا فإن إحداثيات النقطة P في الفضاء الثنائي هي (x, y) و (x', y'). ولكي نبرهن كيف ان هذه الإحداثيات مرتبطة مع بعضها البعض، نأخذ المتجه 0'P (شكل (3-11)، في النظام -xy نقطة بدايته هي (h, k) ونقطة نهايته على (x, y). لذا فإن(0'P = (x-h, y-k. أما في النظام x'y' فنقطة بدايته على (0, 0) ونهايته على (x'y')، أي أن:

$$y' = y - k \quad , \quad x' = x - h$$



شكل (3-11)

الصيغ $x'=x-h$ و $y'=y-k$ تسمى معادلة الإزاحة

مثال (6):

نفرض أن النظام الإحداثي -xy أزيـح للحصـول علـى النظـام الإحداثـي x'y' الذي نقطة أصله في الإحداثيات -xy هي $(h, k) = (3, 1)$

a. أوجد النقطة في الإحداثيات x'y' إذا كانت إحداثياتها xy' هي $P (1, 0)$.

b. أوجد النقطة في الإحداثيات -xy إذا كانت إحداثياتها -x'y' هي $Q (-1, 4)$.

الحل:

a. معادلة الإزاحة هي:

$$y' = y - 1 \quad , \quad x' = x - 3$$

لذا فإن الإحداثيات -x'y' للنقطة $P (1, 0)$ هي:

$$y' = 0-1 = -1 \quad , x' = 1-3 = - 2$$

b. معادلات الإزاحة في الحالة (a) يمكن كتابتها على الشكل:

$$y = y'+ 1 \quad , x' = x + 3$$

لذا فإن الإحداثيات – xy للنقطة Q هي:

$$y = 4 + 1 = 5 \quad , \ x = -1 + 3 = 2$$

ملاحظة:

في الفضاء –3 معادلات الإزاحة هي:

$$z' = z - m \quad , y' = y - k \quad , \ x' = x - h$$

حيث (h, k, m) هي إحداثيات -xyz لنقطة الأصل x'y'z'.

تمارين بند (1-3)

1. ارسم المتجهات الآتية والتي نقاط بدايتها تقع على نقطة الأصل.

a. $v_1 = (2, 3, 4)$ b. $v_2 = (-3, -6)$ c. $v_3 = (2, 2, 0)$ d. $v_4 = (0, 0, 4)$

2. ارسم المتجهات الآتية وعين النقاط التي إحداثياتها:

a. (2, 3, 4) b. (-2, 3, 4) c. (2, 3, -4) d. (0, 2, 0) e. (-4, 0, 0)

3. أوجد مركبات المتجهات التي نقطة بدايتها P_1 ونقطة نهايتها P_2.

4. إذا كانت $w = (4, -1, -3)$, $u = (3, 4, 2)$, $v = (2, 3, -1)$ أوجد:

a. $v - u$ b. $4v + 3u$ c. $-3 (v - 4u)$ d. $2 (u - w) - (6v + w)$

5. لتكن w, u, v كما في السؤال 4. أوجد x إذا علمت أن $3v - u + x = 4x + w$

6. افرض أن النظام الإحداثي -xy لنقطة أزيح للحصول على النظـام الإحداثـي x'y' الذي نقطة أصله 0' التي إحداثياتها -xy هي (2, -3):

a. أوجد الإحداثيات x'y' للنقط P التي إحداثياتها -xy هي (7, 5).

b. أوجد الإحداثيات -xy للنقطة Q التي إحداثياتها x'y' هي (-3, 1).

3-2 طول المتجه (المعيار)؛ العمليات الحسابية للمتجهات:

مبرهنة (1-2-3):

لتكن u, v و w متجهات في فضاء -2 وفضـاء -3، h ,k كميـات ثابتـة، فـإن الصيغ الآتية تكون متحققة.

1- $v + u = u + v$

2- $(v + u) + w = v + (u + w)$

3- $v + 0 = 0 + v = v$

4- $v + (-v) = (-v) + v = 0$

5- $h (kv) = (hk) v$

6- $h (v + u) = hv + hu$

7- $(h + k) v = hv + kv$

8- $1.v = v$

البرهان:

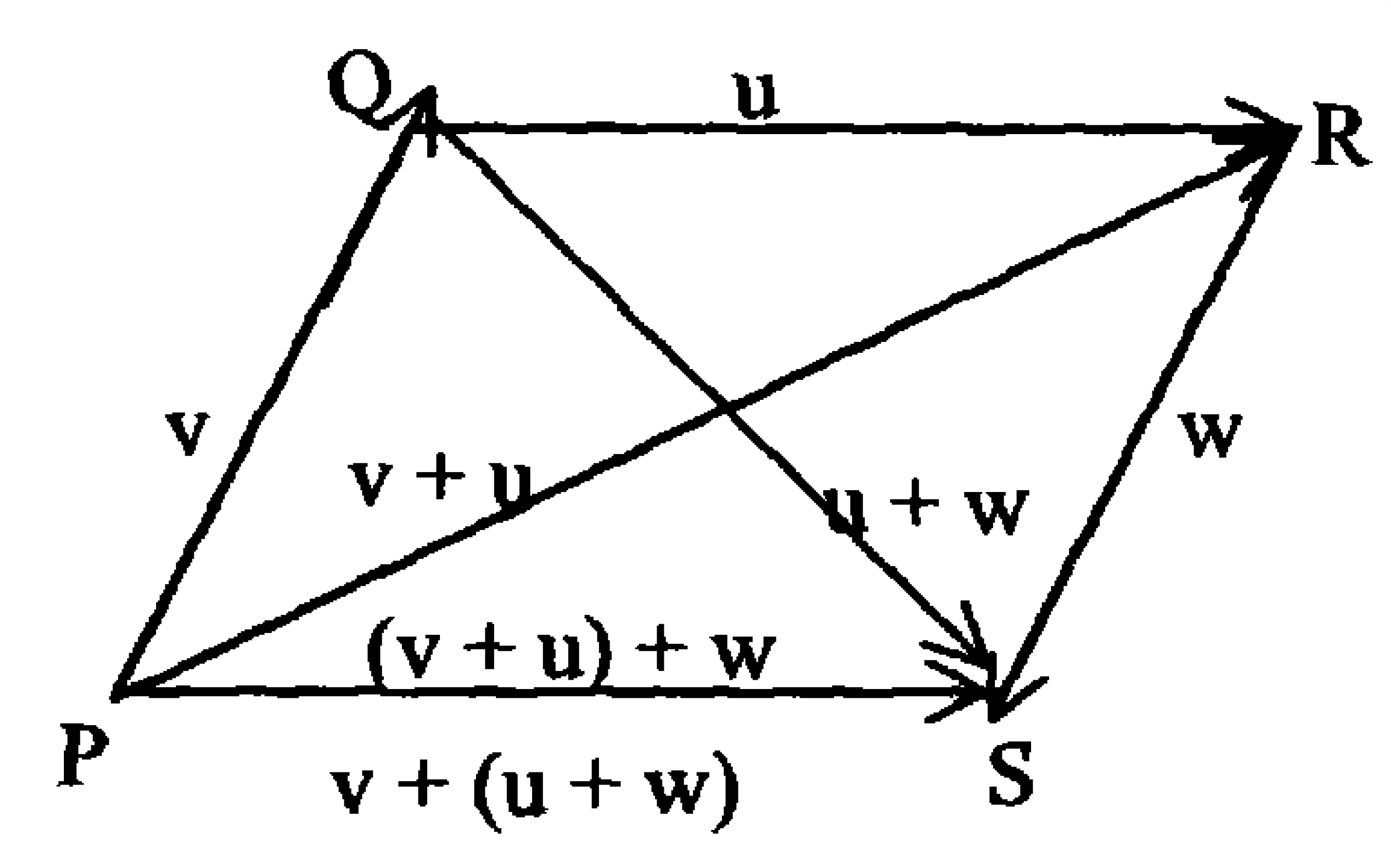
نبرهن العلاقة (2) ونترك البقية كتمارين.

a. الطريقة الهندسية: نفرض أن v, u, w تمثل المتجهات PQ, QR و RS على التوالي [لاحظ الشكل (12-3)].

عليه فإن $u + w = QS$ و $v + (u + w) = PS$

كذلك $v + u = PR$ و $(v + u) + w = PS$

لذا فإن $v + (u + w) = (v + u) + w$



شكل (12-3)

b. الطريقة الجبرية (التحليلية): نفرض أن المتجهات v, u, w مرسومة في فضاء -3 (بنفس الطريقة في الفضاء -2). ولتكن $v = (v_1, v_2, v_3)$ و $u = (u_1, u_2, u_3)$

إذن:

$$v + (u + w) = (v_1, v_2, v_3) + (u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3)$$

$$= (v_1 + (u_1 + w_1) + v_2 + (u_2 + w_2) + v_3 + (u_3 + w_3)$$

$$= ((v_1 + u_1) + w_1 , (v_2 + u_2) + w_2, (v_3 + u_3) + w_3))$$

$$= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) + (w_1, w_2, w_3)$$

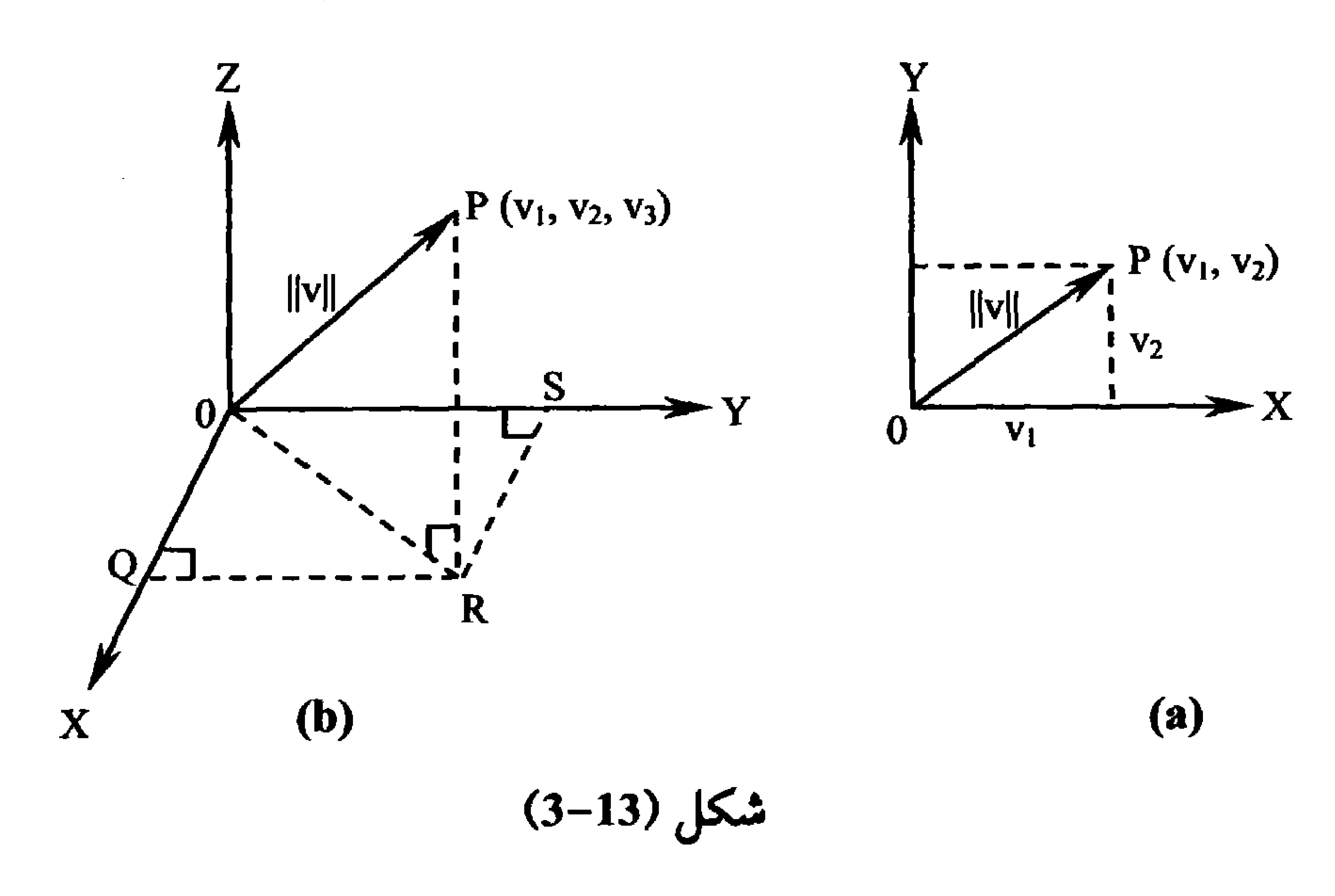
$$= [(v_1, v_2, v_3) + (u_1, u_2, u_3)] + (w_1, w_2, w_3)]$$

عليه $v + (u + w)= (v + u) + w$

طول المتجه: ليكن $v = (v_1, v_2)$ متجه في فضاء -2] $v = (v_1, v_2, v_3)$ في فضاء - 3]
فإن طول v (معيار v)، يكتب $\|v\|$، ومن نظرية فيثاغورس:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \qquad \text{.......... (1)}$$

أو $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ إذا كان v في فضاء -3 [الشكل b (3-13)].



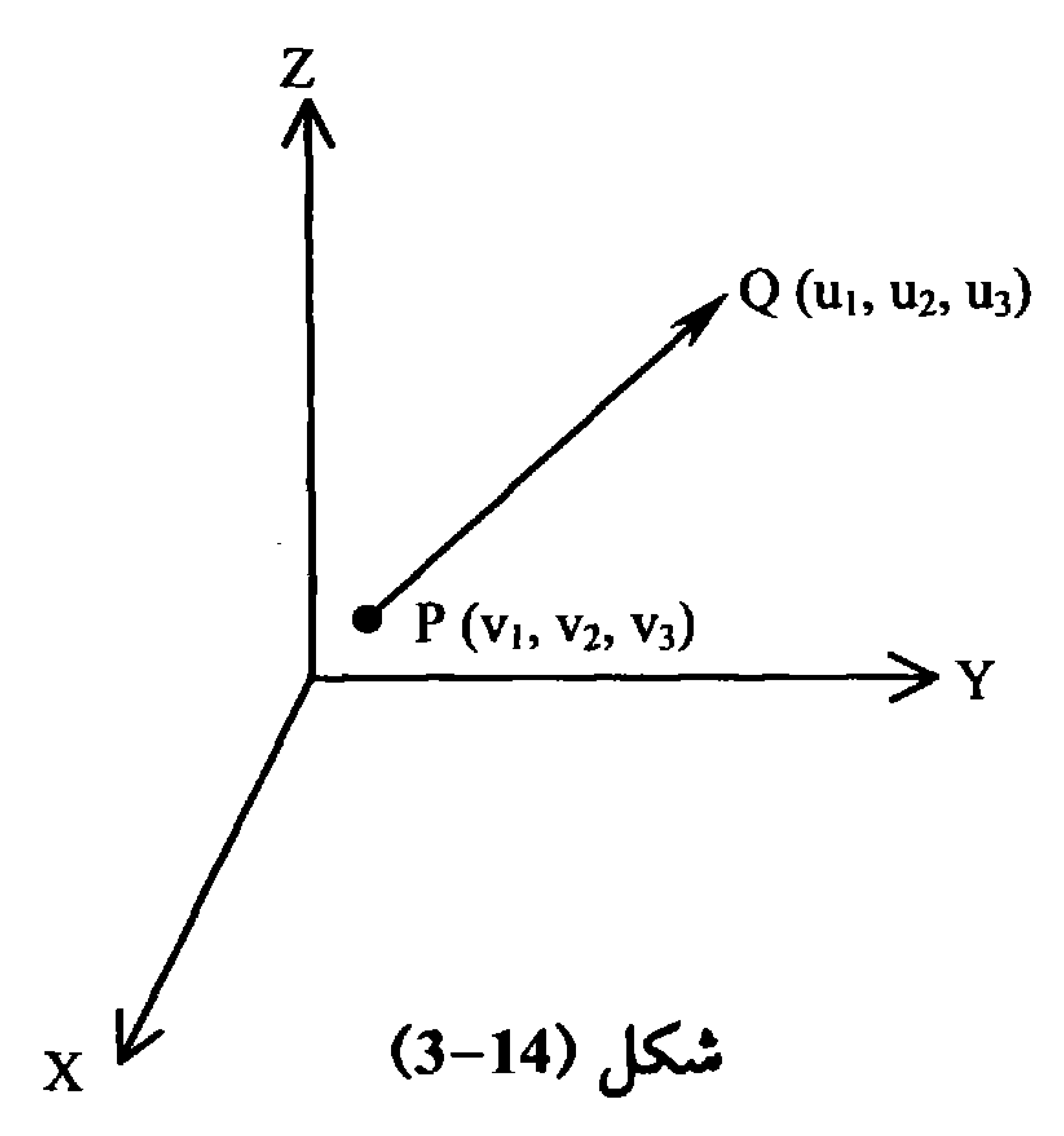
شكل (3-13)

ملاحظة:

المتجه الذي طوله يساوي 1 يسمى متجه الوحدة.

إذا كانت النقطتان $P (v_1, v_2, v_3)$ و $Q (u_1, u_2, u_3)$ في فضاء -3 فإن المسافة بينهما هي طول المتجه PQ ويكتب:

$$d = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2} \qquad \text{.......... (2)}$$



شكل (3-14)

لاحظ أن PQ هو متجه حر حيث ان بدايته لا تقع على نقطة الأصل وعندما P تقع على نقطة الأصل 0 فيسمى بالمتجه المقيد وفي مثل هذه الحالة $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ وبالتعويض في (2) نحصل على:

$$d = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad \text{.......} \quad (3)$$

لاحظ [الشكل b (3-13)].

مثال (1):

1. أوجد طول المتجه $v = (-1, 3, 2)$

2. أوجد المسافة PQ حيث $P(3, 1, -2)$ و $Q(2, -1, 1)$

الحل:

1. طول المتجه v هو:

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{1+9+4}$$
$$= \sqrt{14}$$

2. المسافة هي:

$$d = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-1)^2 + [-1-(-2)]}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

ملاحظة:

من تعريف حاصل ضرب kv، طول المتجه kv، هو:

$$||kv|| = |k|\ ||v|| \quad \text{.......................................} (4)$$

أي ضرب طول v بالكمية |k| من المرات.

تمارين بند (2-3)

1. أوجد طول (معيار) المتجه v إذا كان:

a. $v = (-3, 1)$ b. $v = (0, 3)$ c. $v = (-2, 3, 1)$ d. $v (-1, -1, -1)$

2. أوجد المسافة PQ إذا كانت:

a. $Q (5, 6) , P (3, 4)$ b. $Q (-3\ 2, -1) , P (5, -1, -1)$

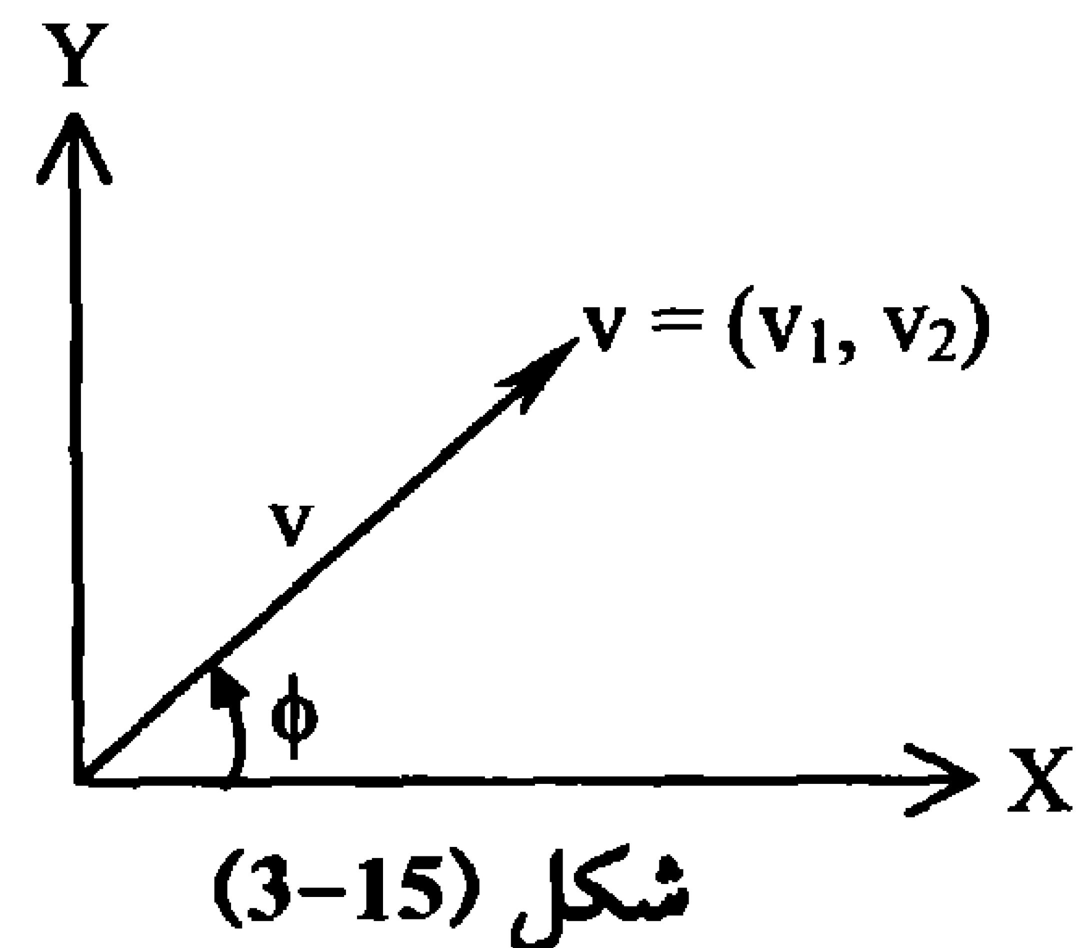
c. $Q (-3, -5) , P (-1, -2)$

3. إذا كانت $v = (3, -3, 4)$ ، $u = (2, -4, 5)$ ، $w = (4, 7, -5)$ فأوجد:

a. $\|2v - 3u + w\|$ b. $\|v\| - \|w\|$ c. $\|-3(u)\| + 2\,\|v\|$ d. $\frac{1}{\|u\|}.u$

4. هل أن $\frac{1}{\|u\|}.u$ متجه وحدة أم لا، حيث u متجه.

5. ليكن $v = (v_1, v_2)$ متجه في فضاء -2. برهن أن $v_1 = \|v\| \cos \phi$ و $v_2 = \|v\| \sin \phi$ في الشكل المجاور.



شكل (3-15)

6. لتكن $v = (v_1, v_2)$ و $u = (u_1, u_2)$ برهن أن $\|v + u\| \le \|v\| + \|u\|$

7. برهن العلاقات الباقية في مبرهنة (1-2-3).

3-3 الضرب النقطي؛ المساقط:

يتضمن هذا البند مناقشة طريقة ضرب المتجهات في الفضاء -2 والفضاء -3 مع إعطاء بعض الأمثلة لهذا الضرب هندسياً.

تعريف (1-3-3):

إذا كانت u, v متجهات مرسومة في الفضاء -2 أو الفضاء -3 بحيث تكون نقاط بدايتهما متطابقة و ϕ هي الزاوية المحصورة بينهما، فإن الضرب النقطي (أو الضرب الداخلي الإقليدي)، يكتب v.u ويعرف كما يلي:

$$v.u = \|v\|\,\|u\| \cos\phi \quad \text{.......... (1)}$$

وإذا كانت $v = 0$ أو $u = 0$ فإن $v.u = 0$

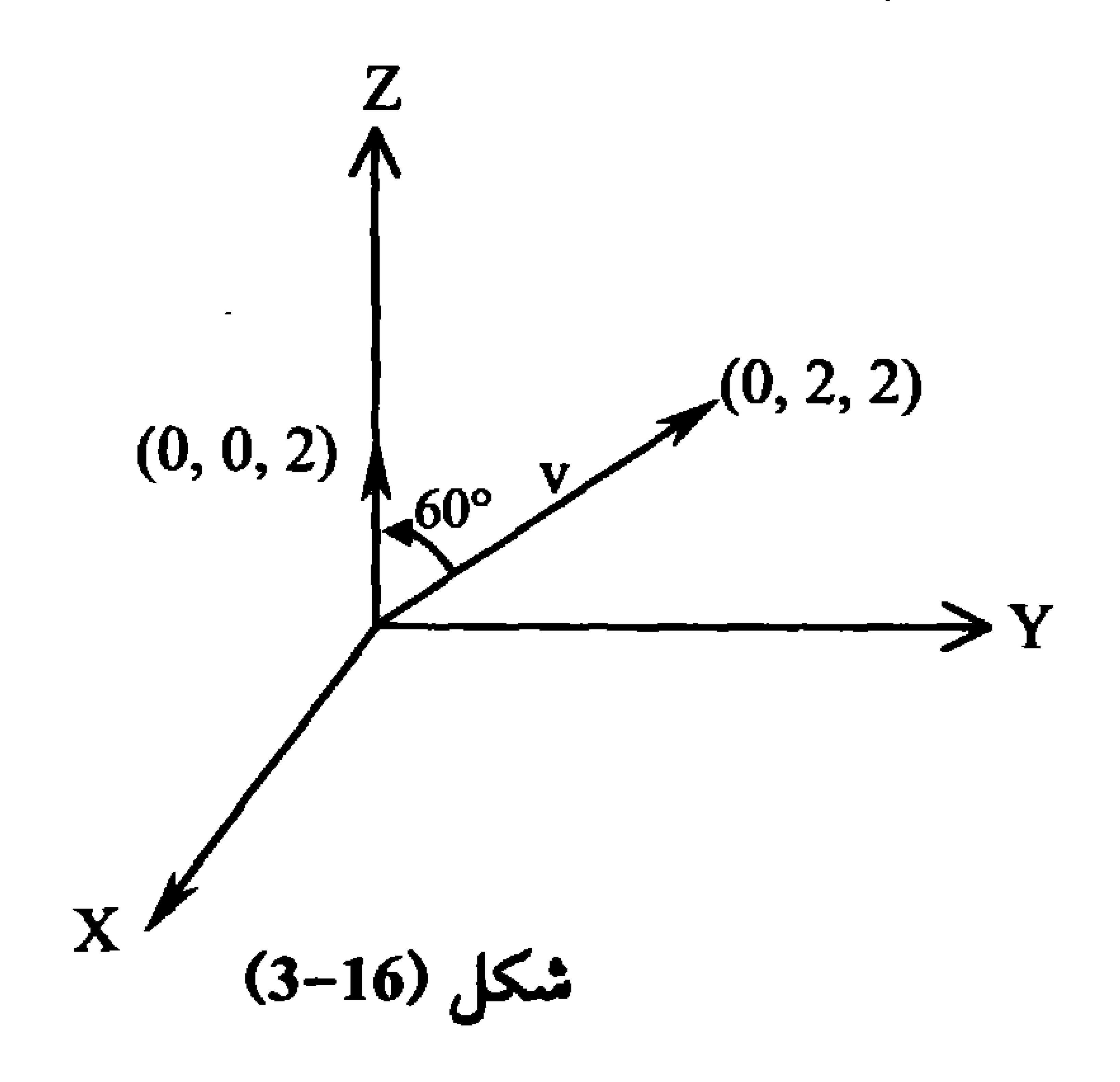
ملاحظة:

الزاوية المحصورة بين u, v تحقق العلاقة $0 \le \phi \le \pi$

مثال (1):

نفرض $v = (0, 2, 2)$ و $u = (0, 0, 1)$ و $\phi = 60$

[شكل (3-16)] فإن:



شكل (3-16)

$$v.u = \|v\|\ \|u\| \cos \phi$$
$$= \left(\sqrt{0+4+4}\right)\left(\sqrt{0+0+1}\right)\cos 60$$
$$= \sqrt{8}.\sqrt{1}.\frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

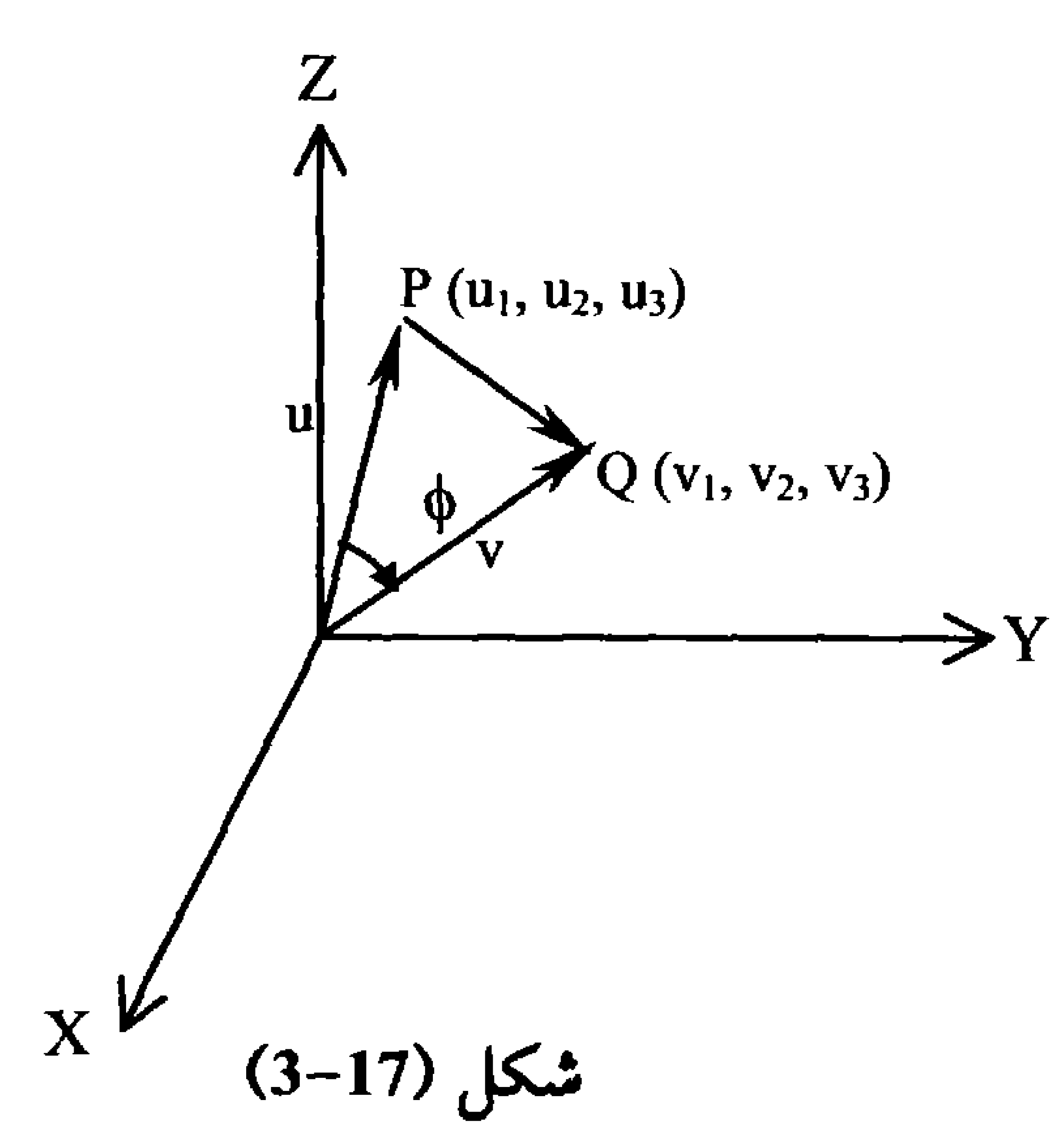
لتكن $v = (v_1, v_2, v_3)$ و $u = (u_1, u_2, u_3)$ متجــهات غـير صفريـة و ϕ الزاويـة بينهما كما موضح في الشكل (3-17) فإن:

من قانون جيوب التمام نحصل على:

$$\|PQ\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\ \|v\|\ \|u\| \cos \phi \quad \text{.......} \quad (2)$$

لكن $PQ = v - u$، عليه:

$$\|v\|\ \|u\| \cos \phi = \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|u\|^2 - \|v-u\|^2 \right)$$



شكل (3-17)

وبالتعويض عن:

$$\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$
$$\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$
$$\|v-u\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

نحصل على:

$$v.u = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 \quad \text{..........} \quad (3)$$

وبالنسبة للفضاء -2:

$$v.u = v_1u_1 + v_2u_2 \quad \text{..........} \quad (4)$$

فإذا كانت v و u متجهات غير صفرية، فإن العلاقة (1) تصبح:

$$\cos\phi = \frac{v.u}{\|v\|\,\|u\|} \quad \text{..........} \quad (5)$$

مثال (2):

لتكن u, v متجهات كما في مثال (1). أوجد الزاوية المحصورة بينهما.

الحل:

بما أن $\cos\phi = \frac{v.u}{\|v\|\,\|u\|}$

$$v.u = 0\times 0 + 2\times 0 + 2\times 1 = 2$$

$$\|v\| = \sqrt{0^2+2^2+2^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\|u\| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1$$

إذن:

$$\cos\phi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

عليه: $\phi = 45°$

مبرهنة (2-3-3):

لتكن u, v متجهات مرسومة في فضاء -2 أو فضاء -3 فإن:

1. $v.v = \|v\|^2$، أي أن $\|v\| = \sqrt{v.v}$
2. لتكن u, v متجهات غير صفرية و ϕ زاوية محصورة بينهما فإن:

a. ϕ زاوية حادة إذا وفقط إذا $v.u > 0$.

b. ϕ زاوية منفرجة إذا وفقط إذا $v.u < 0$.

c. ϕ زاوية قائمة ($\phi = \frac{\pi}{2}$) إذا وفقط إذا $v.u = 0$

البرهان:

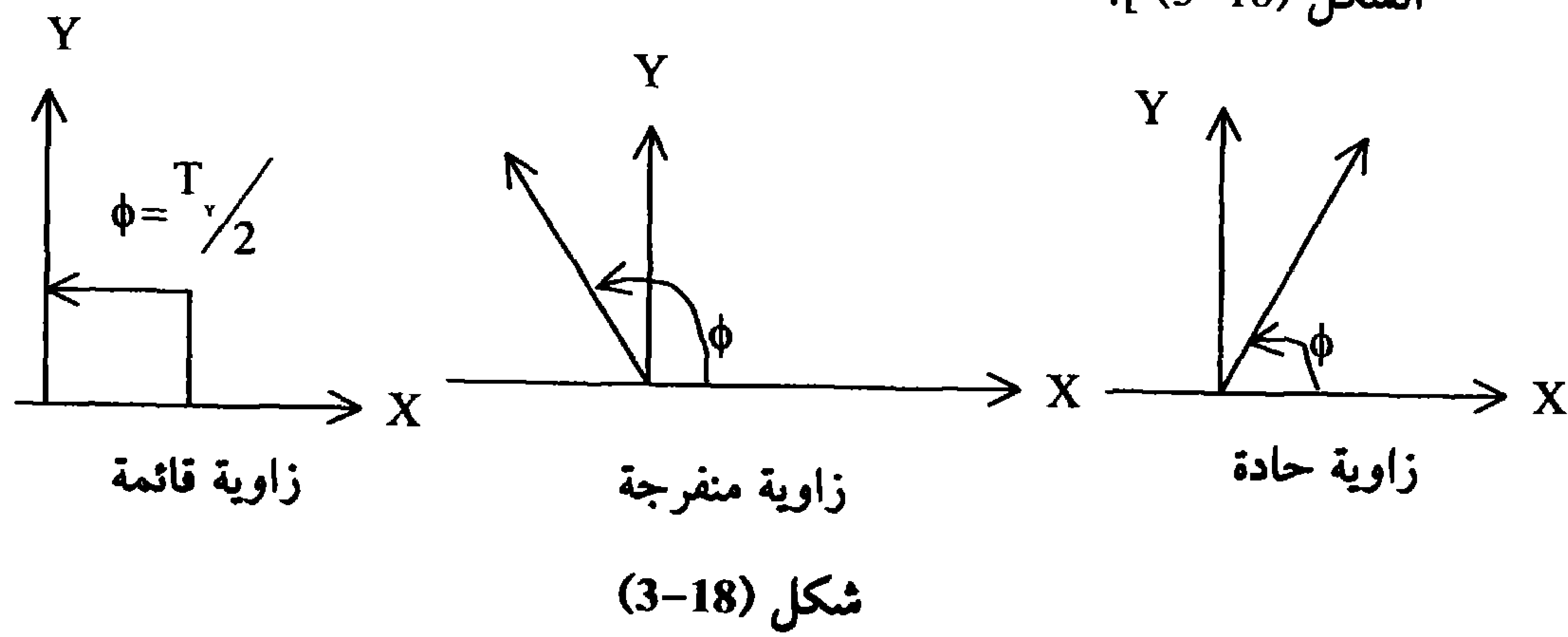
(1) بما أن الزاوية بين v , v هي صفر فإن:

$$v.v = ||v||\,||v|| \cos 0°$$
$$= ||v||^2 \cos 0°$$
$$= ||v||^2$$

عليه:

$$v.v = ||v||^2$$

(2) بما أن $0 \leq \phi \leq \pi$ فإن ϕ زاوية حادة إذا وفقط إذا $\cos\phi > 0$ و ϕ زاوية منفرجة إذا وفقط إذا $\cos\phi < 0$ وكذلك ϕ زاوية قائمة إذا وفقط إذا $\cos\phi = 0$ [لاحظ الشكل (3-18)].



شكل (3-18)

لكن $\cos\phi$ له نفس إشارة v.u لأن $v.u = ||v||\,||u||$، $||v|| > 0$ و $||u|| > 0$. لذا فإن برهان الجزء الثاني متحقق.

مثال (3):

نفرض $v = (2, -3, 4)$, $u = (-4, 3, 1)$, $w = (2, 4, 2)$، فإن:

$$v.u = (2(-4) + (-3)(4) + 4\times 2 = 8 - 9 + 4 = -13.$$

$$v.w = 2 \times 2 + (-3)(4) + 4 \times 2 = 0$$

$$u.w = (-4)(2) + 3 \times 4 + 1 \times 2 = 6$$

لهذا فإن الزاوية بين u, v منفرجة، الزاوية بين v و w قائمة. والزاوية بين w, u حادة.

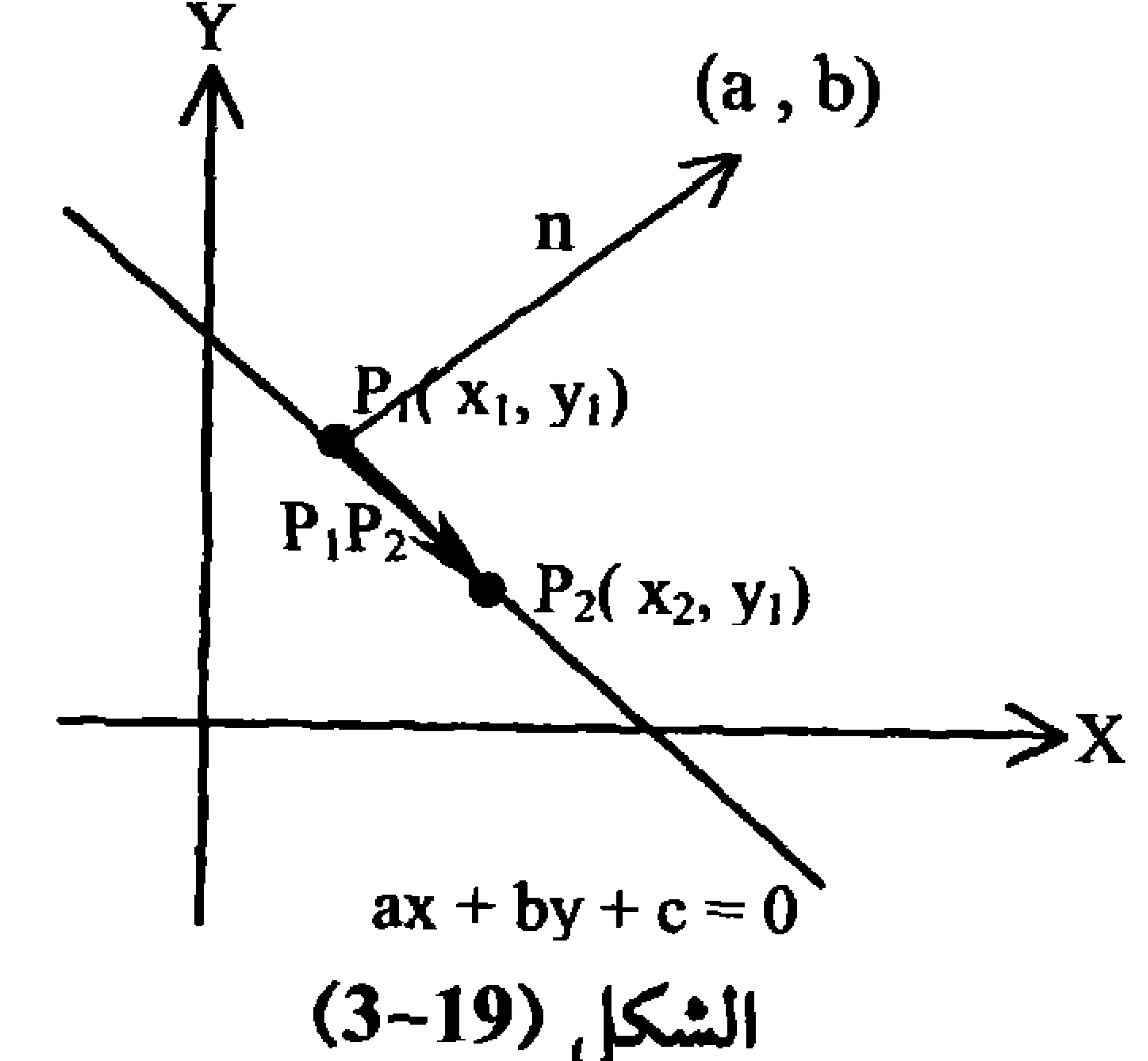
<u>تعامد المتجهات:</u> المتجهين u, v يقال لهما بأنهما متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما التقطي صفراً. بمعنى أن u, v متعامدين إذا وفقط إذا $v.u = 0$ يرمز لتعامد u, v بالرمز $v \perp u$.

مثال (4):

المتجه غير الصفري $n = (a, b)$ المرسوم في فضاء -2 يكون عمودياً على المستقيم $ax + by + c = 0$.

الحل:

نفرض $P_2(x_2, y_2), P_1(x_1, y_1)$ نقاط واقعة على المستقيم [الشكل (3-19)].



الشكل (3-19)

إذن:

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{............} \quad (6)$$

عليه وبطرح المعادلتين نحصل على:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

أي:

$$(a, b) . (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$$

أو

$$n . P_1P_2 = 0$$

إذن n والمتجه P_1P_2 متعامدين.

مبرهنة (3-3-3):

لتكن w, u, v متجهات مرسومة في فضاء -2 أو فضاء -3 و k كمية ثابتة، فإن الخواص الآتية تكون صحيحة:

1. $v.u = u.v$
2. $v . (u + w) = v.u + v.w$.
3. $k (v.u) = (kv) . u = v . (ku)$.
4. $v.v > 0$ إذا كان $v \neq 0$ و $v . v = 0$ إذا $v = 0$.

البرهان:

نبرهن (1) و بقية الخواص تترك كتمارين.

نفرض $v = (v_1, v_2, v_3)$ و $u = (u_1, u_2, u_3)$

إذن:

$$v.u = (v_1, v_2, v_3) . (u_1, u_2, u_3)$$
$$= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3$$

كذلك:

$$u.v = (u_1, u_2, u_3) . (v_1, v_2, v_3)$$
$$= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$
$$= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = v.u$$

إذن:

$$v.u = u.v$$

مثال (5):

لتكن $v = (2, 0, -3)$ و $u = (6, 1, 4)$ فإن:

$$v.u = (2, 0, -3) . (6, 1, 4)$$
$$= 2 \times 6 + 0 \times 1 + (-3)(4)$$
$$= 12 + 0 - 12 = 0$$

إذن $v.u = 0$

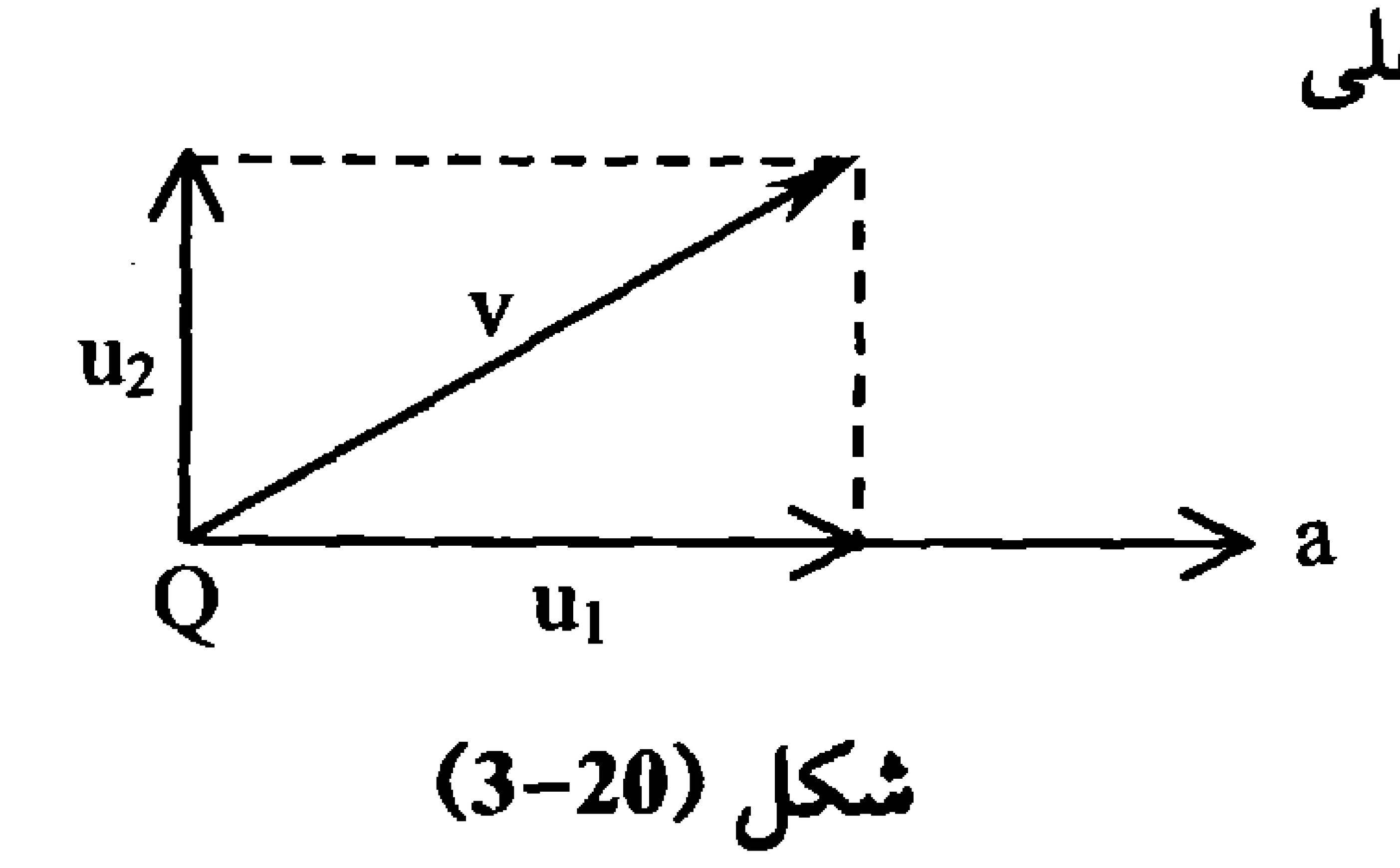
عليه فإن $v \perp u$.

المساقط المتعامدة: في بعض التطبيقات نحتاج إلى تحليل المتجه v إلى مركبتين، أحدهما توازي متجه ما مثل a والأخرى عمودية عليه، فإذا فرضنا أن بداية المتجه v تنطبق على بداية المتجه a كما في المثال (5) يمكننا تحليل v بإسقاط عمود من نهايتـه علـى المتجه a أو امتداده فنحصل على المركبة الأولى u_1 والمركبة الثانية ستكون.

$$u_2 = v - u_1$$

u_1 يسمى المسقط العمودي للمتجه v على a ويرمز له بالرمز $proj_a v$، وتسمى u_2 مركبة المتجه v العمودية على a وتكتب:

$$u_2 = v - proj_a v$$



شكل (3-20)

ملاحظة:

من الشكل (3-20)، المتجه u_1 موازياً إلى a و u_2 عمودياً على a وأن

$$u_1 + u_2 = u_1 + (v - u_1) = v$$

مبرهنة (3-3-4):

لتكن v و a متجهات مرسومة في فضاء -2 وفضاء -3 وأن $a \neq 0$، فإن:

مركبة المتجه v على امتداد a هي: $proj_a v$

ومركبة المتجه v العمودية على a هي: $v - proj_a v = v - \frac{v.a}{\| a \|^2} a$

البرهان:

نفرض أن $u_1 = proj_a v \ , \ u_2 = v - proj_a^{v}$

بما أن u_1 يوازي a فإن $u_1 = \lambda a$ (λ كمية ثابتة). لذا:

$$v = u_1 + u_2 = \lambda a + u_2 \quad \text{.......... (8)}$$

ويأخذ الضرب النقطي لكلا الطرفين مع المتجه a وباستخدام كل من المبرهنتين (2-3-3) و (3-3-3) نحصل على:

$$v.a = (\lambda a) + u_2) \,.\, a = \lambda \,\|a\|^2 + u_2.a \qquad (8)$$

وبما أن $u_2.a = 0$ لأن u_2 عمود على a فإن: $\lambda = \frac{v.a}{\| a \|^2}$

فإن $proj_a v = u_1 = \lambda\, a$

مثال (6):

لتكن $a = (-3,\ 2)$ و $u = (2,\ 1)$. أوجد مركبة u على امتداد a ومركبته العمودية على a.

الحل:

مركبة u على امتداد a هي:

$$proj_a u = \frac{v.a}{\| a \|^2} u = \frac{-6+2}{9+4}(-3,2)$$

$$= \frac{-4}{13}(-3,2) = \left(\frac{12}{13},\frac{8}{13}\right)$$

المركبة العمودية على a هي:

$$u - proj_a u = (2,\ 1) - \left(\frac{12}{3},-\frac{8}{13}\right)$$

$$= \left(2-\frac{12}{13},1+\frac{8}{13}\right)$$

$$= \left(\frac{26-12}{13},\frac{13+8}{13}\right)$$

$$= \left(\frac{14}{13},\frac{21}{13}\right)$$

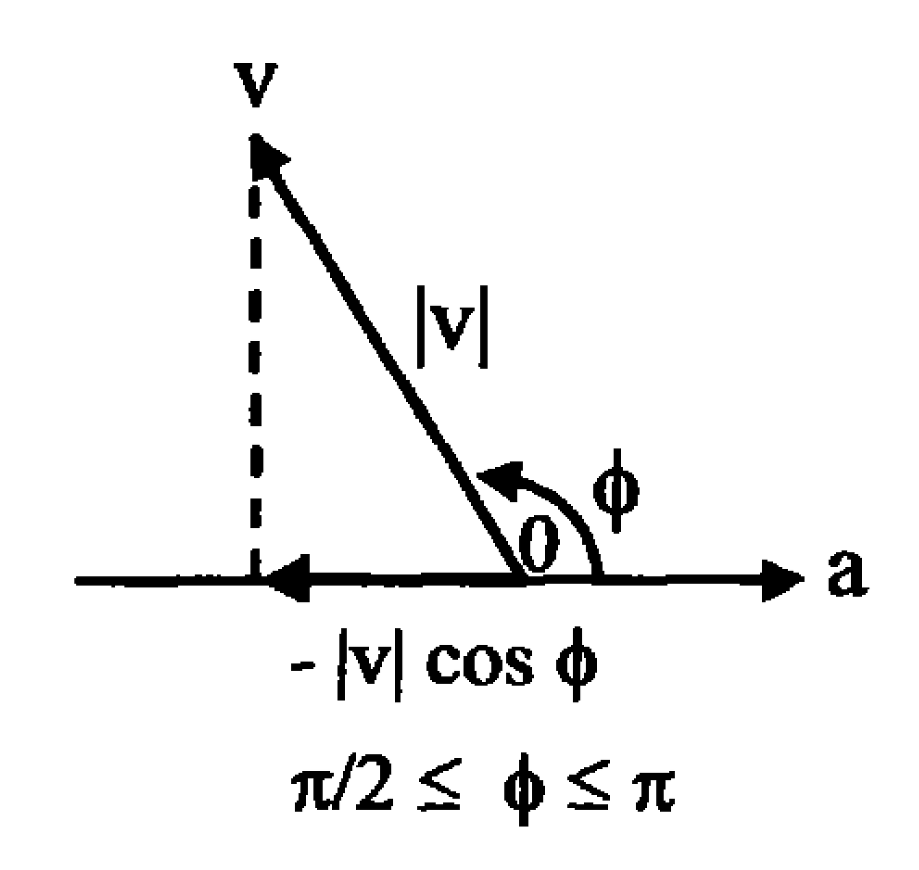
ولكي نتحقق من أن $u\text{-}proj_a u$ عمود على a:

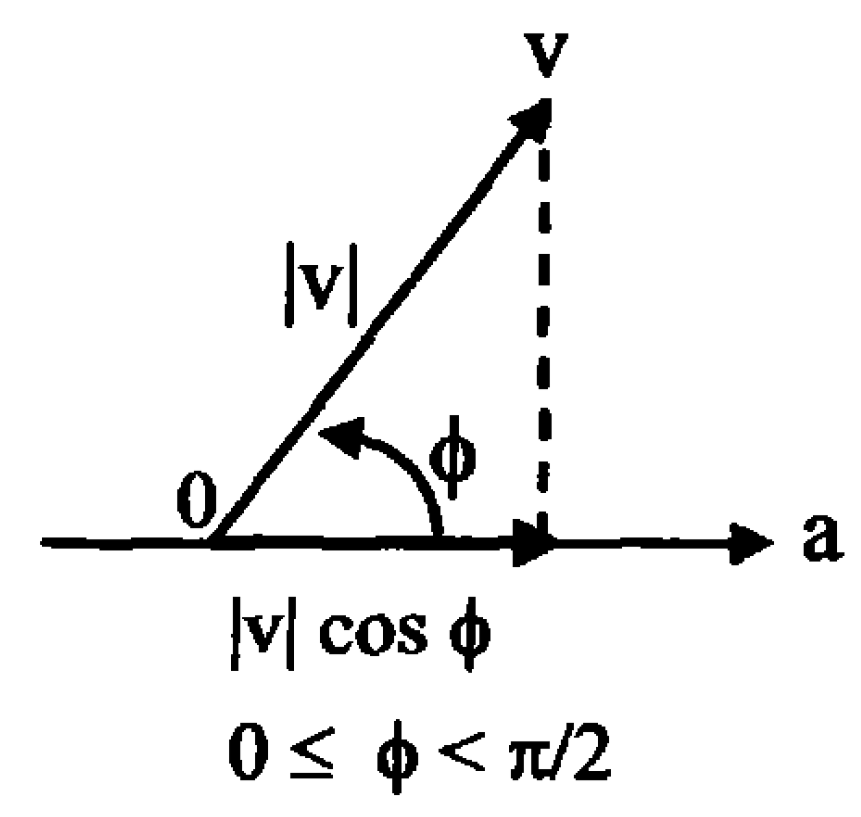
$$(u - proj_a\, u) \, . \, a = (-3, 2) \, . \left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}\right)$$

$$= \frac{-3 \times 14}{19}, \frac{2 \times 21}{13}$$

$$= -\frac{42}{13}, \frac{42}{13} = 0$$

عليه فهما متعامدان.





شكل (3–21)

<u>الزاوية بين مركبة v باتجاه v وa:</u>

طول مركبة v باتجاه a هو:

$$\|proj_a v\| = \left\| \frac{v.a}{\| a \|^2} a \right\|$$

$$= \left| \frac{v.a}{\| a \|^2} \right| \| a \| \qquad \text{(بواسطة الصيغة 4 بند 2–3)}$$

$$= \frac{| v.a |}{\| a \|^2} \| a \|$$

$$= \frac{| v.a |}{\| a \|} \qquad \text{(لأن } \|a\| > 0\text{)}$$

$$proj_a v = \frac{| v.a |}{\| a \|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

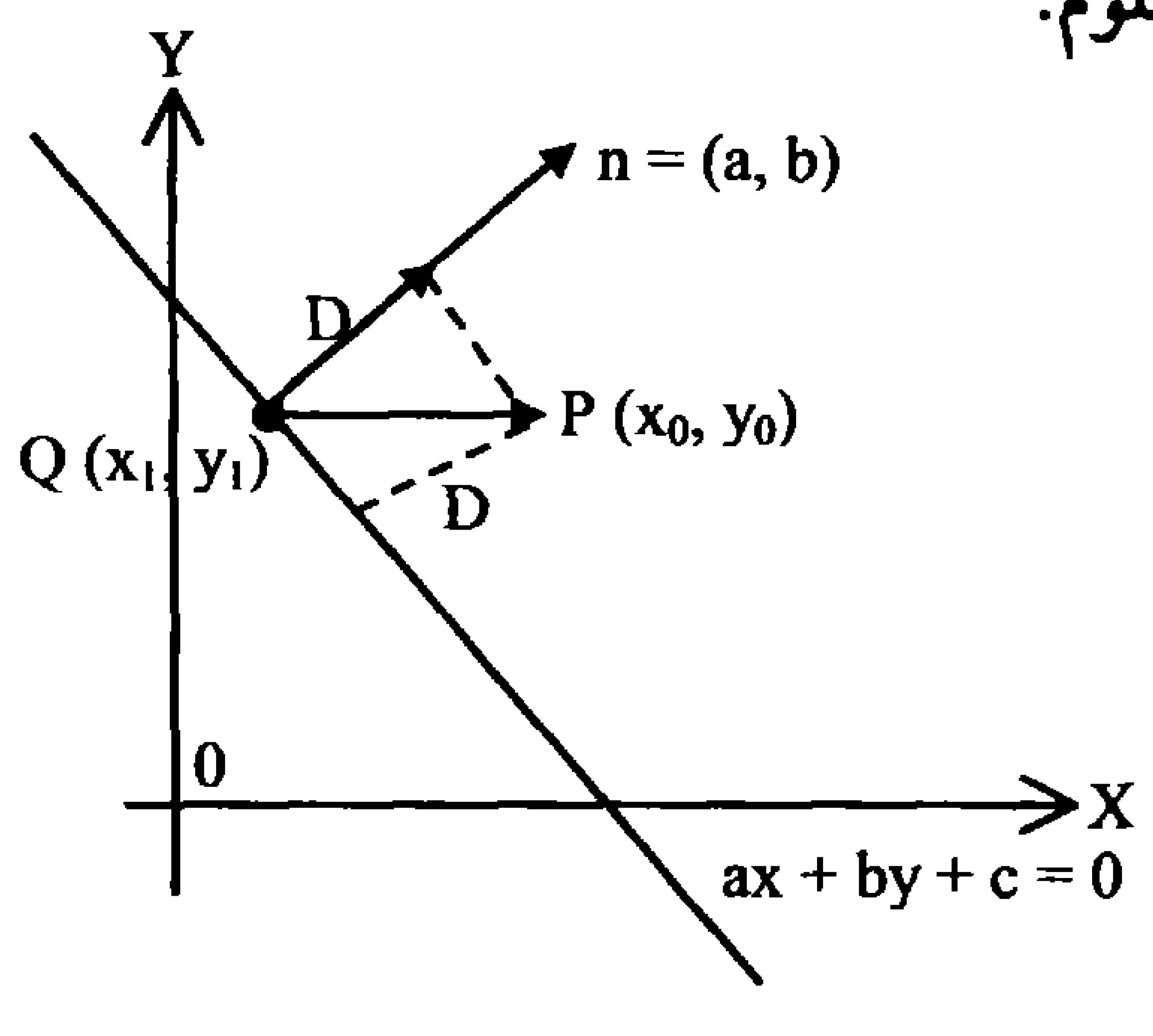
إذا فرضنا أن الزاوية ϕ بين v و a فإن:

$$v.a = \|v\| \, \|a\| \cos \phi$$

$$\| proj_a \, v\| = \|v\| \cos \phi \quad \text{.......... (10)}$$

المسافة بين نقطة معلومة ومستقيم معلوم:

نفرض $P(x_0, y_0)$ نقطة معلومة والمستقيم المعلوم $ax + by + c = 0$ ولتكن $Q(x_1, x_2)$ نقطة على المستقيم. نرسم المتجه (الناظم) $n = (a, b)$ بحيث تكون Q بدايته.



شكل (3-22)

عليه فإن n عمود على المستقيم، من الشكل (3-22) نلاحظ أن:

$$D = \|proj_n QP\| = \frac{|QP.n|}{\|n\|}$$

لكن:

$$QP = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$$

$$QP.n = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)$$

$$\|n\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

عليه:

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{.......... (11)}$$

وبما أن النقطة Q تقع على المستقيم فإن مركباتها تحقق معادلة المستقيم.

لذا فإن:

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

أي:

$$c = -ax_1 - by$$

وبالتعويض في العلاقة (11) نحصل على:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{.......... (12)}$$

مثال (7):

أوجد المسافة من النقطة (1 ,3-) إلى المستقيم $4x + 3y + 4 = 0$

الحل:

بالتعويض في العلاقة (12):

$$D = \frac{|(4)(-3)+3(1)+4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-12+3+4|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

مثال (8): أوجد المسافة بين المستوى $2x - y + 3z = 6$ والنقطة Q (3, 5, 7)

الحل:

نعين نقطة على المستوى ولتكن P (3, 0, 0) (لأنها تحقق المعادلة أعلاه)

الناظم $n = (2, -1, 3)$

لهذا $PQ = (0, 5, -7)$

و $|PQ \,.\, n| = 26$ (تحقق من ذلك)

كذلك $\|n\| = \sqrt{14}$

عليه $D = 26/\sqrt{4}$ (بالتعويض في العلاقة $D = \frac{|PQ.n|}{\|n\|}$)

تمارين بند (3-3)

1. أوجد $v.u$ لما يأتي:

a. $u = (2, 3)$, $v = (4, -6)$ b. $u = (2, 2, 2)$, $v = (1, -2, 3)$

c. $u = (1, 6, -4)$, $v = (-1, 2, 3)$

2. أوجد الزاوية ϕ بين u, v في تمرين 1.

3. هل أن الزاوية المحصورة بين u, v زاوية حادة، منفرجة أو قائمة لما يأتي:

a. $u = (0, 0, 1)$, $v = (1, 1, 1)$ b. $u = (-6, 0, 4)$, $v = (3, 1, 6)$

4. أوجد المسقط العمود للمتجه v على a لما يأتي:

1. $v = (-1, -2)$, $a = (-2, 3)$ 2. $v = (3, 1, -7)$, $a = (1, 0, 5)$

5. أوجد مركبة v العمودية على a للمتجهات في تمرين 4.

6. برهن أن $v = (a, b)$ و $u = (-b, a)$ متعامدان.

7. أوجد المسافة من النقطة $(2, 5)$ للمستقيم $4x + y - 2 = 0$

8. برهن أن:

$$||v + u||^2 + ||v - u||^2 = 2\,||v|| + 2\,||u||$$

9. ليكن $v = (3, \alpha)$ و $u = (1, 4)$ أوجد α إذا:

a. v و u متعامدان.

b. v و u متوازيان.

10. لتكن $v = (1, 1)$ و $u = (2, 3)$ أوجد $proj_v u$ مع الرسم.

3-4 الضرب الاتجاهي (الضرب التقاطعي):

كثيراً من تطبيقات المتجهات في الفيزياء والهندسة تحتاج إلى معرفة المتجه المرسوم في الفضاء -3 الذي يكون عمودياً على متجهين معلومين. سنحاول في هذا البند التعريف بأحد أنواع المتجهات الذي يعطينا ذلك المتجه.

تعريف (3-4-1): لتكن $v = (v_1, v_2, v_3)$ و $u = (u_1, u_2, u_3)$ متجهان مرسومان في فضاء -3، فإن <u>الضرب الاتجاهي</u>، يكتب $v \times u$، يعرف:

$$v \times u = (v_2u_3 - v_3u_2 \, , \, v_1u_3 - v_3u_1 \, , \, v_2u_1 - v_1u_2)$$

أو

$$v \times u = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \right) \quad \text{.................................... (1)}$$

إن حفظ الصيغة أعلاه قد يبدو صعباً، لذا نقترح الطريقة الآتية لإيجاد مركبات $v \times u$.

1. نرتب مركبات v و u بشكل مصفوفة سعتها 3 × 2.

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

2. نوجد المركبة الأولى للمتجه $v \times u$ بحذف العمود الأول ونأخذ محدد المصفوفة الباقية فنحصل على:

$$\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

3. نوجد المركبة الثانية للمتجه $v \times u$ بحذف العمود الثاني ونأخذ سالب محدد المصفوفة الباقية:

$$-\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}$$

4. نحذف العمود الثالث من المصفوفة الأصلية ونأخذ محدد المصفوفة المتبقية نحصل على:

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

مثال (1):

أوجد v × u إذا علمت أن v = (4-, 0, 2) و u = (1, 3, -3)

الحل:

نجد مصفوفة مركبات v و u:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$v \times u = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-6, 14, 12)$$

ملاحظة:

الضرب النقطي v.u هو كمية ثابتة بينما الضرب الاتجاهي v × u فهو متجه. كما وأن المتجه v × u عمودي على كل من v و u.

مبرهنة (2-4-3):

إذا كانت w, u, v متجهات مرسومة في فضاء -3 فإن:

1. v. (v × u) = 0 (v × u عمود على v).
2. u . (v × u) (v ×u عمود على u).
3. ||v × u|| = ||v||^2 ||u||^2 - (v.u) (متساوية لاكرانج)
4. v × (u × w) = (v.w)u - (v.u) w (العلاقة بين الضرب الاتجاهي والنقطي)
5. (v × u) × w = (v.w)u - (u.w)v (العلاقة بين الضرب الاتجاهي والنقطي)

البرهان:

نبرهن الحالة (1) ونترك البقية كتمارين

لتكن $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ فإن:

$$v. (v \times u) = (v_1, v_2, v_3) . (v_2u_3 - v_3u_2, v_3u_1, v_1u_3, v_1u_2 - v_2u_1)$$

$$= v_1 (v_3u_2 - v_3u_3) + v_2 (v_3u_1 - v_1u_3) + v_3 (v_1u_2 - v_2u_1 = 0$$

مثال (2):

لتكن $v = (2, 3, -4)$، $u = (1, -1, 2)$. احسب $u \times v$ ثم برهن أن $u \times v$ عمودياً على كل من u و v.

الحل:

$$u \times v = (-2, 8, 5)$$

$$u . (u \times v) = (1, -1, 2) . (-2, 8, 5)$$

$$= -2 - 8 + 10 = 0$$

وبنفس الطريقة $v. (u \times v) = 0$

لذا فإن $u \times v$ عمودياً على كل من u و v.

مبرهنة (3-4-3):

إذا كانت w, u, v متجهات في فضاء -3 و k كمية ثابتة فإن:

1. $v \times u = - (u \times v)$
2. $v \times (u \times w) = (v \times u) + (v \times w)$
3. $(v + u) \times w = (v \times w) + (u \times w)$
4. $k (v \times u) = (kv) u = v (ku)$
5. $v \times 0 = 0 \times v = 0$
6. $v \times v = 0$

البرهان:

نكتب المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$(v \times u) = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, , -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (v_2u_3 - v_3u_2 , - (v_1u_3 - v_3u_1) , (v_1u_2 - v_2u_1)$$

$$= (u_3v_2 - u_2v_3), (u_3v_3 - u_1v_3) , (u_2v_1 - u_1v_2)$$

$$= - (u_2v_3 - u_3v_2) , (u_1v_3 - u_3v_1) , (u_1v_2 - u_2v_1)$$

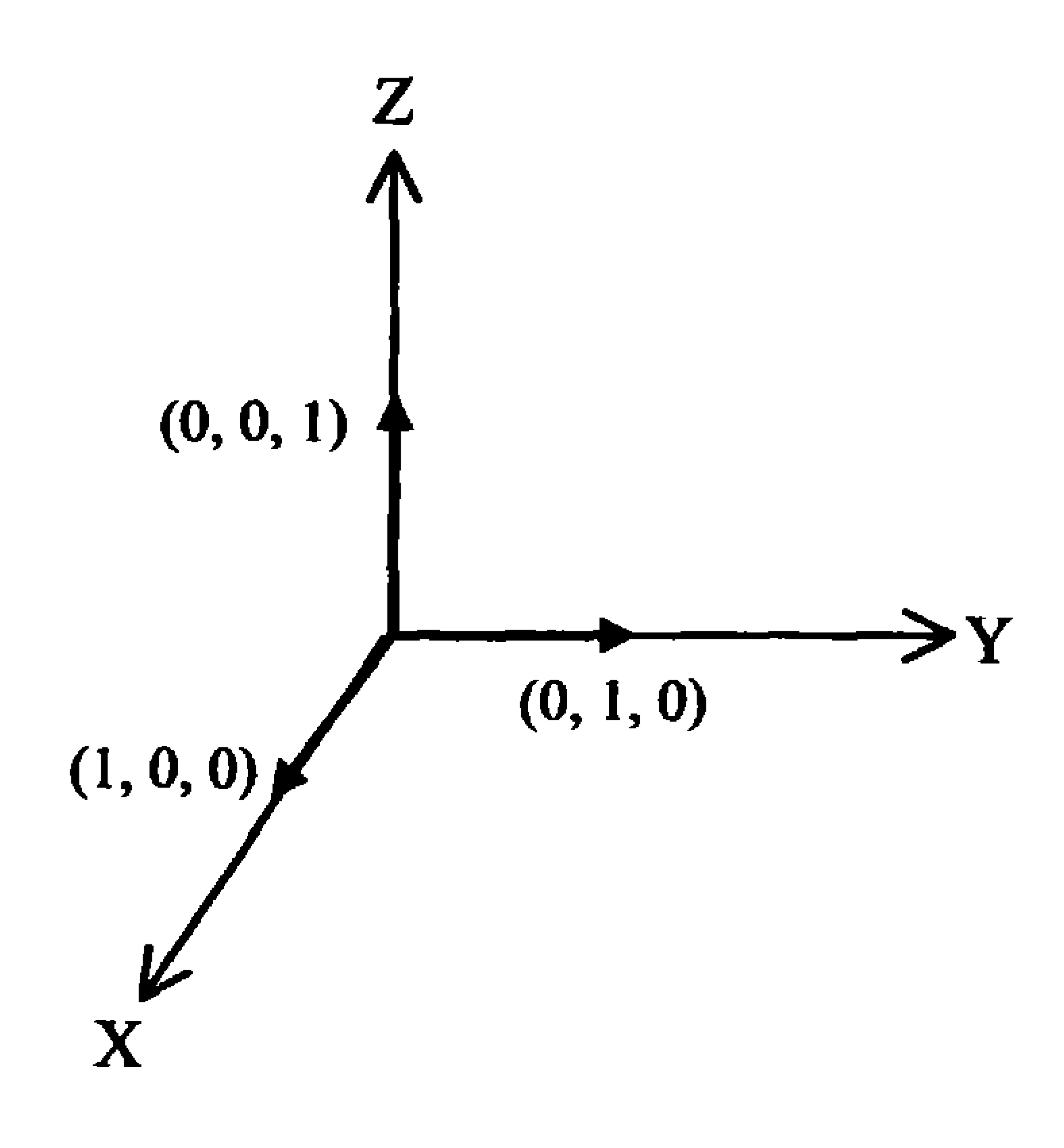
$$= -(u \times v)$$

تمرين: برهن الحالات الأخرى

لتكن $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$ هـذه المتجـهات تسـمى متجهات الوحدة القياسية في فضاء -3 وتقع على امتداد الإحداثيات الثلاثية (الشكل (3-23). وأن أي متجه مثل $v = (v_1, v_2, v_3)$ يمكن التعبير عنه بدلالة i, j, k وكالآتي:

$$v = (v_1, v_2, v_3) = v_1 (1, 0, 0) + v_2 (0, 1, 0) + v_3 (0, 0, 1)$$

$$= v_1i + v_2j + v_3k$$



شكل (3-23)

فمثلاً:

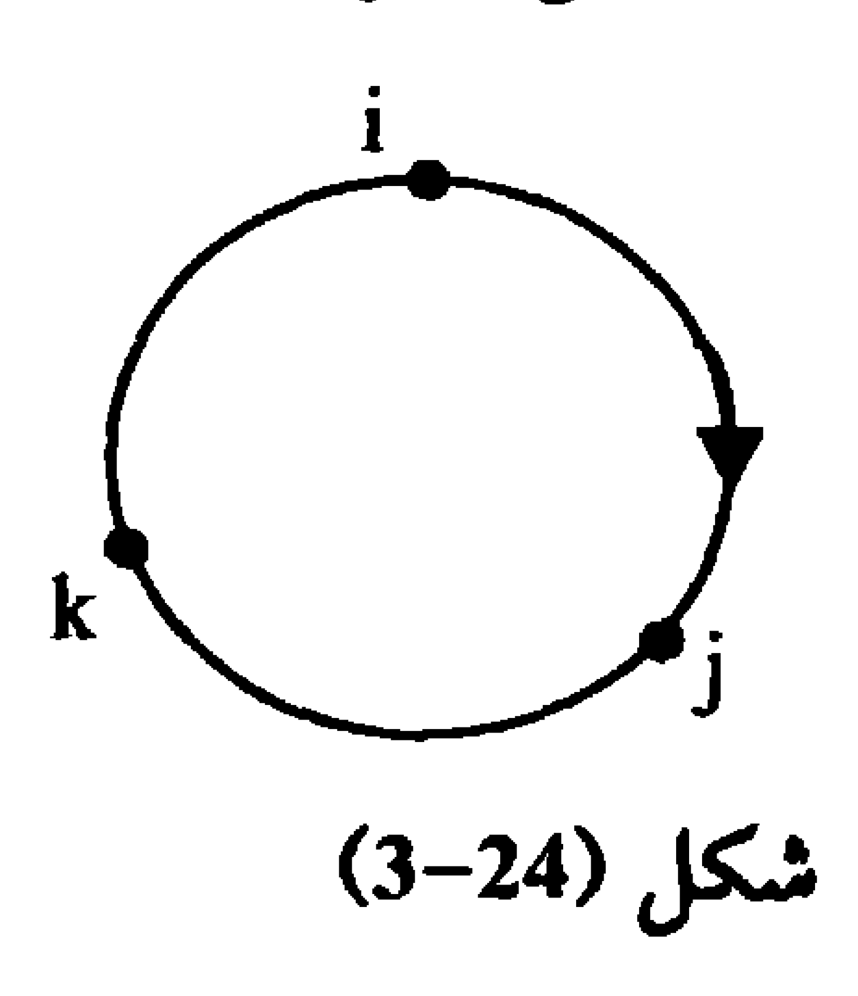
$$(2, -3, 4) = 2i - 3j + 4k$$

ومن تعريف الضرب الاتجاهي يمكن برهان:

$$i \times j = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = k$$

وبنفس الطريقة:

1. $j \times i = j \times j = k \times k = 0$
2. $k \times i = j \quad , j \times k = i \quad , \quad i \times j = k$
3. $i \times k = -j \quad , k \times j = -i \quad , \quad j \times i = -k$



شكل (3-24)

ولسهولة حفظ هذه العلاقات يمكن تمثيل ذلك باستخدام الشكل (24-3)، حيث أن الضرب الاتجاهي لأي متجهين قياسيين باتجاه عقارب الساعة يساوي المتجه الثالث بإشارة موجبة والضرب عكس حركة عقارب الساعة فيساوي المتجه الثالث بإشارة سالبة.

ملاحظة:

يمكن التعبير عن الضرب الاتجاهي باستخدام k, j, i وكما يأتي:

$$v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

مثال (3):

لتكن $v = (1, 0, -2)$ و $u = (3, 2, 1)$ فإن:

$$v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$= 41 - 7j + 2k$$

تمرين: برهن أن $v \times (u \times w) \neq (v \times u) \times w$ (تلميح: استخدم المتجهات القياسية)

مبرهنة (4-4-3):

إذا كانت v و u متجهان في فضاء -3، فإن $\|v \times u\|$ تساوي مساحة متوازي الأضلاع المتكون بواسطة v و u.

البرهان:

من المبرهنة (2-4-3) (3) لدينا:

$$\|v\times u\|^2 = \|v\|^2 \|u\|^2 - (v.u)^2 \quad\text{.......}(3)$$

فإذا كانت ϕ هي الزاوية المحصورة بين v و u فإن:

$$v.u = \|v\| \|u\| \cos\phi$$

عليه:

$$\begin{aligned}\|v \times u\|^2 &= \|v\|^2 \|u\|^2 - \|v\|^2 \|u\|^2 \cos^2\phi \\ &= \|v\|^2 \|u\|^2 (1 - \cos^2\phi) \\ &= \|v\|^2 \|u\|^2 \sin^2\phi\end{aligned}$$

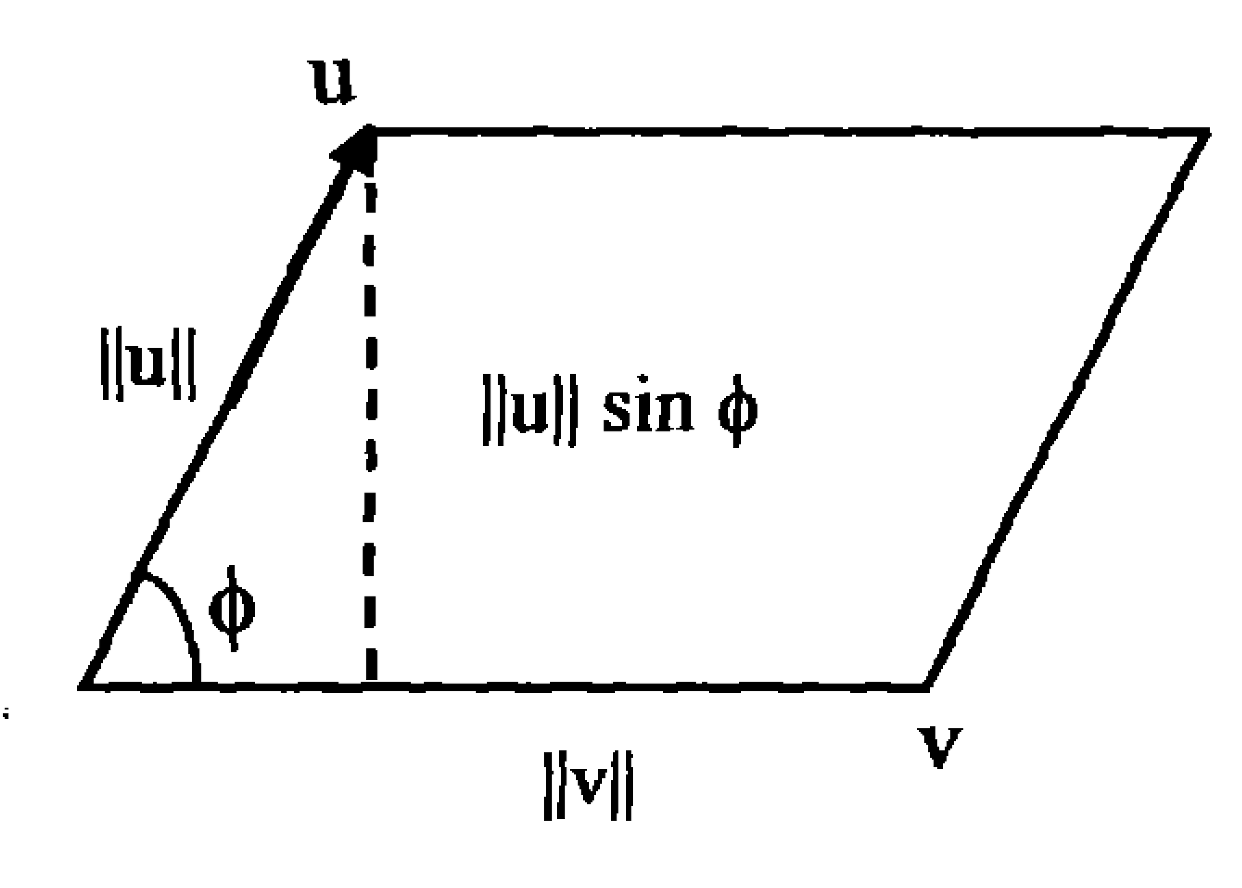
ولكن $0 \leq \phi \leq \pi$ فإن $\sin\phi \geq 0$. لذا نحصل على:

$$\|v \times u\| = \|v\| \|u\| \sin\phi \quad\text{.......}(4)$$

لكن $\|u\| \sin\phi$ هو ارتفاع متوازي الأضلاع المتكون من v و u. لذا فإن مساحته A (شكل 25-3) هي:

A = القاعدة × الارتفاع. أي:

$$A = \|v\| \|u\| \sin\phi = \|v \times u\|$$



شكل (25-3)

مثال (4):

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي رؤوسه (2- ,3 ,1) P، (4 ,1 ,2) Q و R (-3, 1, 6).

الحل:

من الشكل (26-3):

$$A = \|PQ \times QR\| = \|(i - 2j + 6k) \times (-5i + 2k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \|-4i - 32j - 10k\| = \sqrt{1140}$$

شكل (26-3)

تعريف (5-4-3):

إذا كانت w, u, v متجهات في فضاء -3، فإن v.(u × w) يقال له <u>الضرب الثلاثي النقطي</u>.

من الممكن إيجاد الضرب الثلاثي النقطي للمتجهات $v = (v_1, v_2, v_3)$ و $u = (u_1, u_2, u_3)$ و $w = (w_1, w_2, w_3)$ من الصيغة:

$$v \cdot (u \times w) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad \text{...} \quad (5)$$

ولبرهان ذلك:

$$v\,.\,(u \times w) = v\,.\,\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} k \right)$$

$$= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

مثال (5):

أوجد الضرب الثلاثي النقطي للمتجهات:

$w = 3i - j + 2k$ و $u = i + 3j - k$ ،$v = i + j + 2k$

الحل:

باستخدام الصيغة (5):

$$v\,.\,(u \times w) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (6 - 1) - (2 + 3) + 2\,(-1 - 9) = 5 - 5 - 20$$

$$= -20$$

تمرين (1): مساحة متوازي الأضلاع في فضاء -2 المتكون من $u = (u_1, u_2)$ و $u = (u_1, u_2)$ تساوي القيمة المطلقة للمحدد:

$$A = \left| \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix}$$

(2) حجم متوازي المستطيلات في فضاء 3 المتكون بوساطة المتجهات $v = (v_1, v_2, v_3)$ و $u = (u_1, u_2, u_3)$ و $w = (w_1, w_2, w_3)$ يساوي القيمة المطلقة للمحدد:

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

الحل:

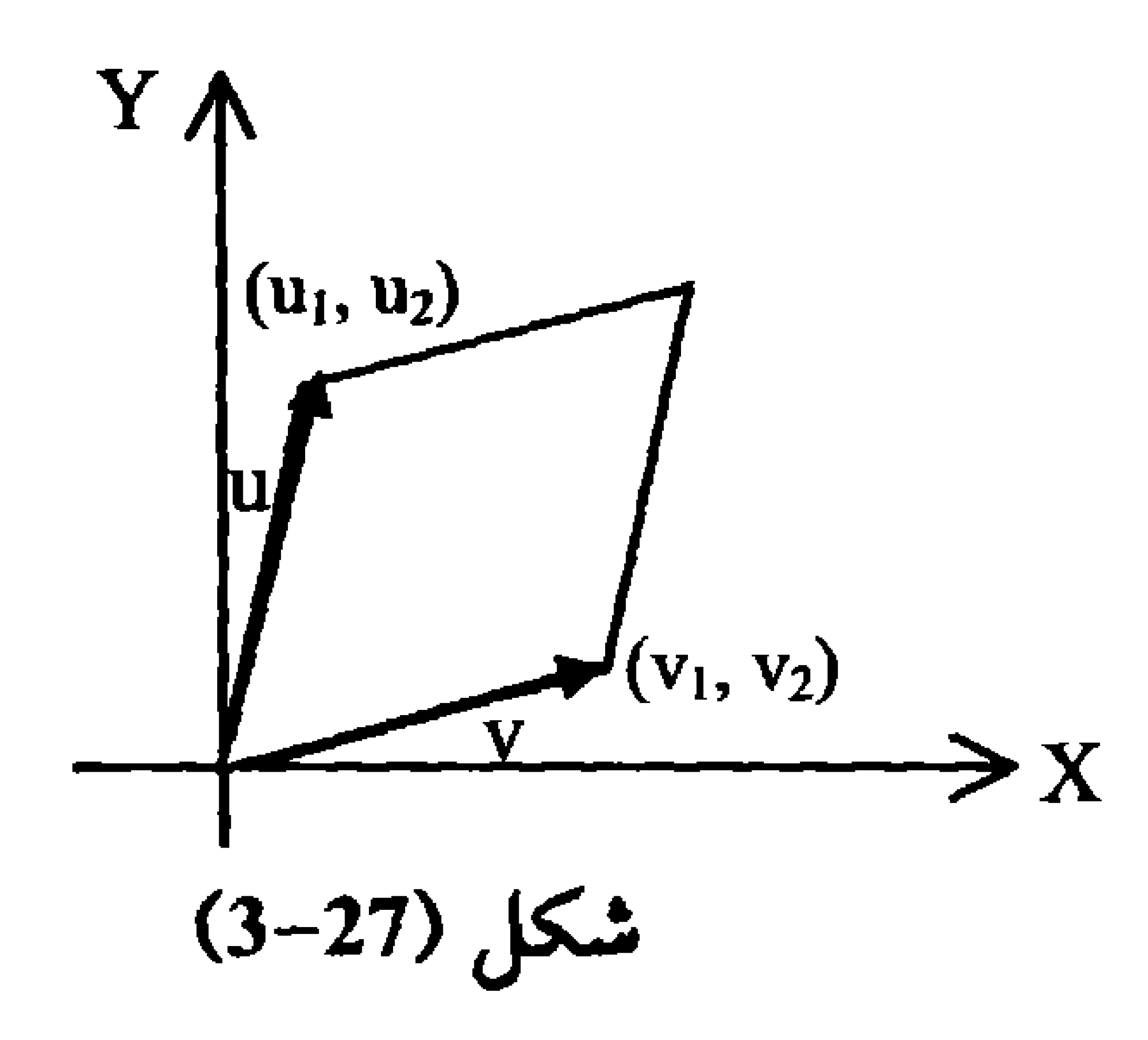
(1) من الممكن استعمال مبرهنة (3-4-4) لبرهان الحالة (1) من خلال اعتبار $v = (v_1, v_2)$ و $u= (u_1, u_2)$ متجهات مرسومة في الفضاء الجزئي xy من النظام الثلاثي الأبعاد xyz (شكل 27-3). في هذه الحالة $v = (v_1, v_2, 0)$ و $(u_1, u_2, 0)$. لذا

$$v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} k = \det \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

وبموجب المبرهنة (3-4-4) وحقيقة كون $\|k\| = 1$، المساحة A لمتوازي الأضلاع المحدد بالمتجهات U, V :

$$A = \| v \times u \| = \left\| \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} \right\| \| k \|$$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} \right| K$$



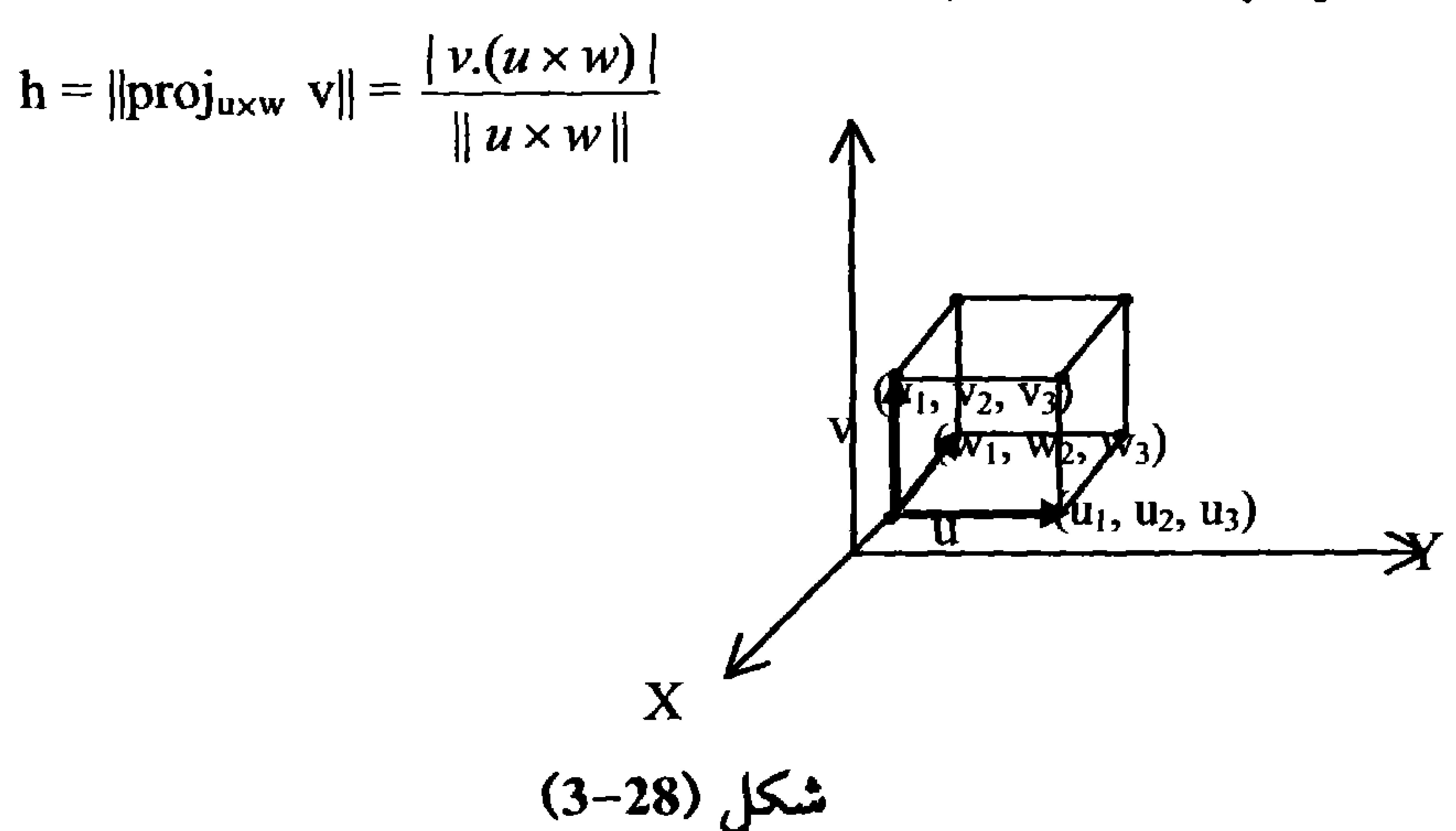
شكل (3-27)

(2) قاعدة متوازي المستطيلات المتكونة من المتجهات w, u, v عبارة عن متوازي الأضلاع المتكون بواسطة w, u (شكل 28-3)

عليه وبموجب مبرهنة (4-4-3) فإن مساحة القاعدة هي $\|u \times w\|$، وارتفاع متوازي المستطيلات h هو طول المسقط العمودي للمتجه v على $u \times w$.

لذا وبموجب الصيغة (9) بند (3-3).

$$h = \|proj_{u \times w}\ v\| = \frac{|v.(u \times w)|}{\|u \times w\|}$$



شكل (3-28)

عليه فحجم متوازي المستطيلات:

V = القاعدة × الارتفاع

$$V = \|u \times w\| \frac{|v.(u \times w)|}{\|u \times w\|} = |v.(u \times w)|$$

وبموجب الصيغة (5)

$$\text{(حجم متوازي المستطيلات)}\ V = \left| \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

مثال (6):

أوجد حجم متوازي المستطيلات المحدد بالمتجهات $v = (4, 1, 1)$ و $u = (2, 1, 0)$ و $w = (0, 2, 3)$

الحل:

$$\text{(الحجم)}\ V = \left| \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = |2-6+4| = 10$$

تعريف (6-4-3):

المستويين π_1 و π_2 متوازيين إذا كان حاصل ضربهما الاتجاهي يساوي صفراً ($\pi_1 \times \pi_2 = 0$).

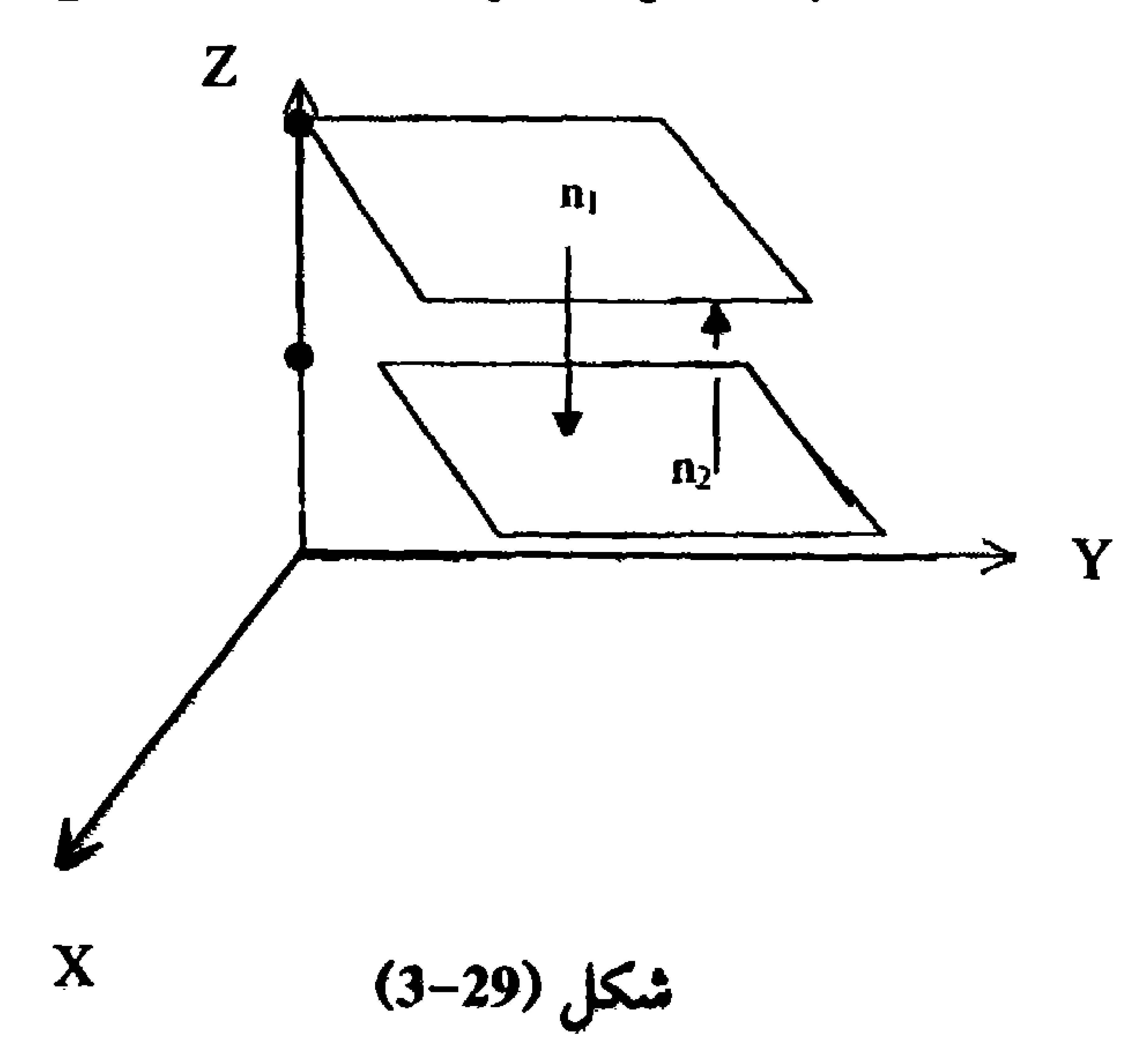
مثال (7):

لتكن $\pi_1 = 2 \times 3y - z = 3$ و $\pi_2 = -4i - 6j + 2k$ برهن أن π_1 يوازي π_2.

الحل:

بما أن $n_1 = 2i + 3j - k$ و $n_2 = -4i - 6j + 2k$ و $n_2 = -2n$

وكذلك $n_1 \times n_2 = 0$ فإن المستويان متوازيين. لاحظ الشكل (3-29)



شكل (3-29)

تمارين بند (3-4)

1. أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهات الآتية:

a. $v = j + k \quad , u = i - j$ b. $v = i + 2j + k \quad , \quad u = 2i - 3j + k$

2. أوجد المتجه العمود على كل من v و u:

a. $v = (0, 3, 1) \quad , \quad u = (1, -1, 2)$

b. $v = 2i + 3j - 4k \quad , \quad u = i - j + 2k$

3. احسب $(3i + 4k) \times (2i - 3j)$

4. أوجد مساحة متوازي الأضلاع إذا علمت أن النقاط المتجاورة هي:

a. $(1, -2, 3) \; , (2, 0, 1) \; , \; (0, 4, 0)$

b. $(-2, 1, 1) \; , (2, 2, 3) \; , \; (-1, -2, 4)$

5. جد مساحة المثلث الذي رؤوسه: $P_3\,(0, 4, 3), P_2\,(3, 0, 5)\,, P_1\,(1, 1, 0)$

6. برهن $j \times k = -k \times j = i \; , \; i \times j = -j \times i = k \, , \, k \times i = -i \times k = j$

7. إذا علمت إن ϕ هي الزاوية بين v و u و $v \cdot u \neq 0$ فإن:

$$\tan \phi = \frac{\| v \times u \|}{v.u}$$

8. باستخدام الضرب الاتجاهي، أوجد جيب الزاوية المحصورة بين $v = (2, 3, 6)$ و $u = (2, 3, -6)$.

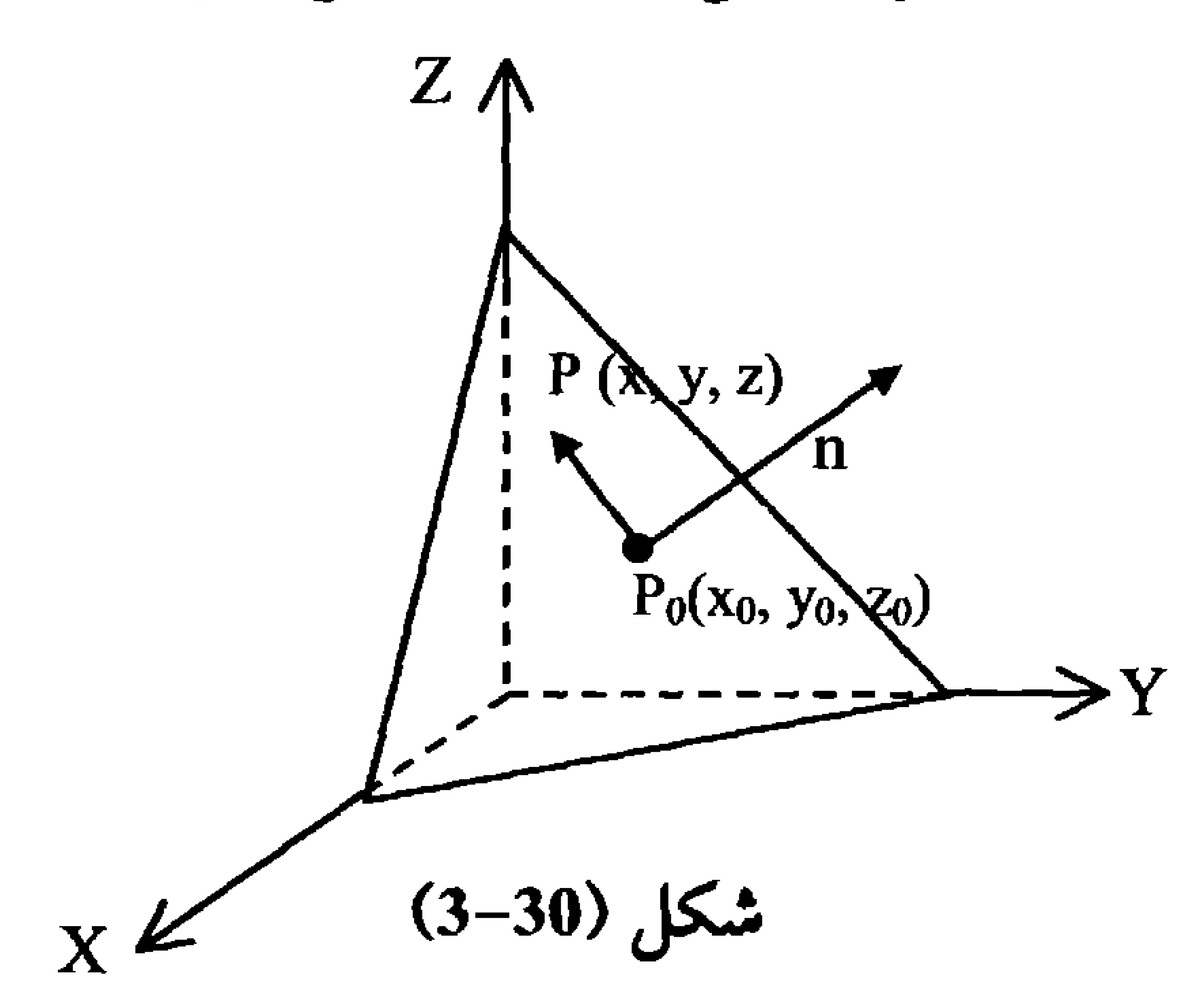
3-5 المستقيمات والمستويات في الفضاء الثلاثي:

يتضمن هذا البند اشتقاق معادلات المستقيمات والمستويات في الفضاء -3 باستعمال المتجهات وتوظيف تلك المعادلات لحل المسائل الهندسية الأساسية.

<u>المستويات في الفضاء -3:</u> لتعين مستقيم ما في المستوى نحتاج لمعرفة ميله ونقطة واقعة عليه، ويمكن تعيين المستوى في فضاء -3 إذا عرف انحداره ونقطة واقعة عليه. الطريقة المناسبة لتعين الانحدار هي في تحديد متجه (يسمى المتجه الناظم) غير صفري عمودياً على المستوى.

نفرض أننا نريد إيجاد معادلة المستوى المار بالنقطة $P_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ وله المتجه غير الصفري $n = (a, b, c)$ العمود عليه.

واضح من الشكل (3-30) أن المستوى المطلوب يتكون من تلك النقاط $P\ (x, y, z)$ بحيث يكون المتجه P_0P عمودياً على المتجه n. بمعنى آخر



شكل (3-30)

$$n \cdot P_0P = 0 \qquad (1)$$

ولما كان:

$$P_0P = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

فإن الصيغة (1) تصبح:

$$n \cdot (x - x_0 , y - y_0, z - z_0) = 0$$

أي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \text{.......} \quad (2)$$

أو:

$$ax + by + cz = d \quad \text{.......} \quad (3)$$

مثال (1):

أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $P_0(2, 5, 1)$ والذي ناظمه $n = (1, -2, 3)$.

الحل:

بالتعويض في الصيغة (2):

$$1(x - 2) + (-2)(y - 5) + 1(z - 1) = 0$$

أو

$$x - 2y + 3z = 5$$

مثال (2):

أوجد معادلة المستوى المار بالنقاط الثلاث $P_1(1, 2, -1)$ و $P_2(2, 3, 1)$ و $P(3, -1, 2)$.

الحل:

بما أن جميع النقاط تقع على المستوى فإن مركباتها تحقق المعادلة العامة.

بالتعويض في الصيغة العامة:

$$a + 2b - c = d$$

$$2a + 3b + c = d \quad \text{.......} \quad (4)$$

$$3a - b + 2c = d$$

وبحل هذا النظام نحصل على:

$t=-16$ بتعويض , $a=\frac{-9}{16}t$, $b=-\frac{1}{16}t$, $c=\frac{5}{16}t$, $d=t$

إذن المعادلة هي:

$9x+y-5z-16=0$

طريقة ثانية لإيجاد معادلة المستوى (الصيغة الاتجاهية):

هناك صيغة ثابتة مهمة لمعادلة المستوى في فضاء -3 تتلخص فيما يلي:

ليكن $r(x, y, z)$ متجه من نقطة الأصل للنقطة $P(x, y, z)$ و $r_0(x_0, y_0, {}_0)$ متجه من نقطة للأصل للنقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و $n=(a, b, c)$ عمود على المستوى شكل (3-31) لذا:

$P_0P=r-r_0$

تسمى هذه الصيغة بالصيغة الاتجاهية لمعادلة المستوى

بالتعويض في الصيغة (1) نحصل:

$n.(r-r_0)=0$ .... (5)

مثال (3): أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (4 ,3 ,4) وعمودياً على المتجه $n=(-1, 2, 5)$.

الحل:

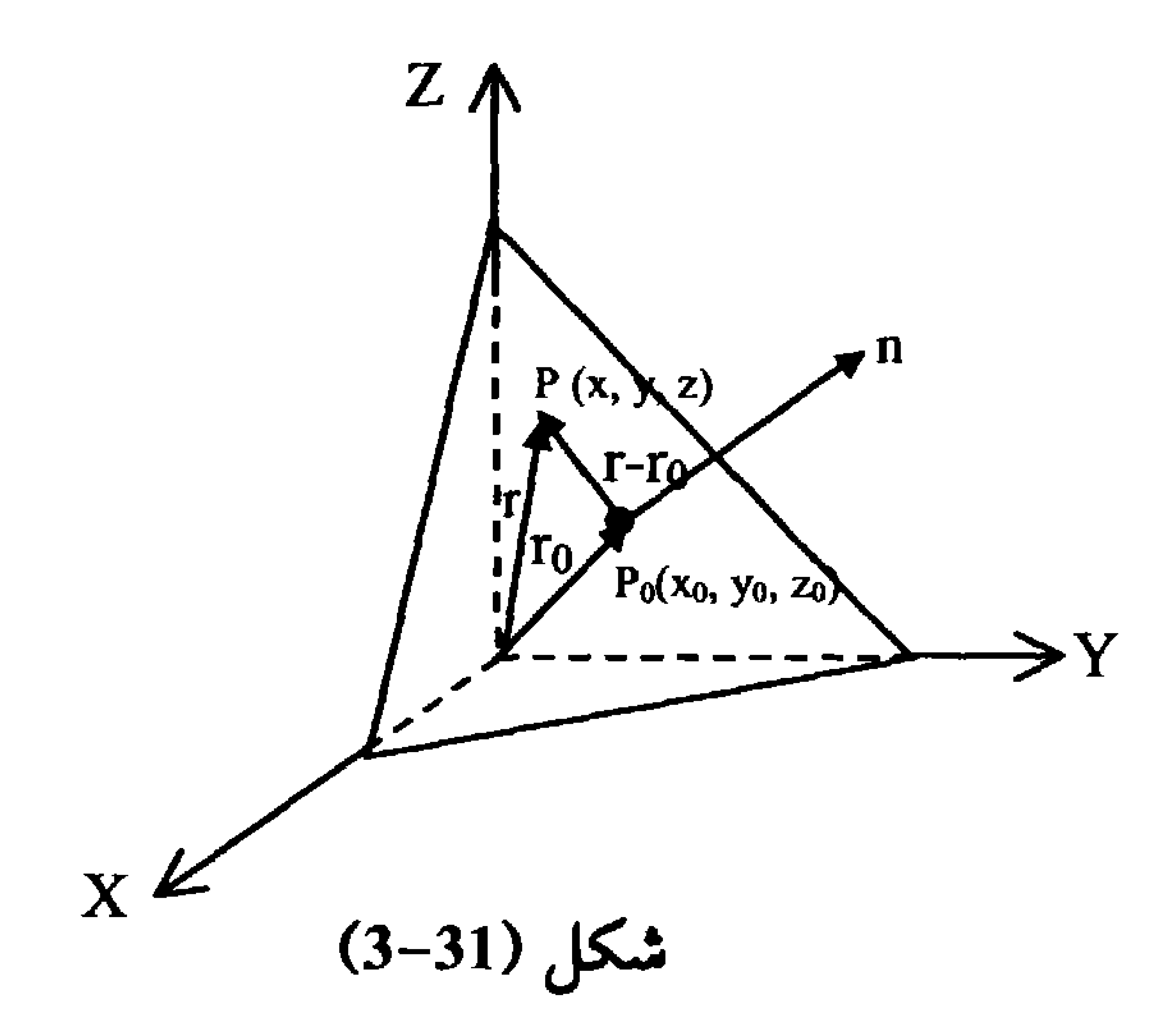
بالتعويض في الصيغة (5) نحصل على:

$(-1, 2, 5).(x-6, y-3, z-4)=0$

$-1(x-6)+2(y-3)+5(z-4)=0$

$-x+2y+5z+20=0$

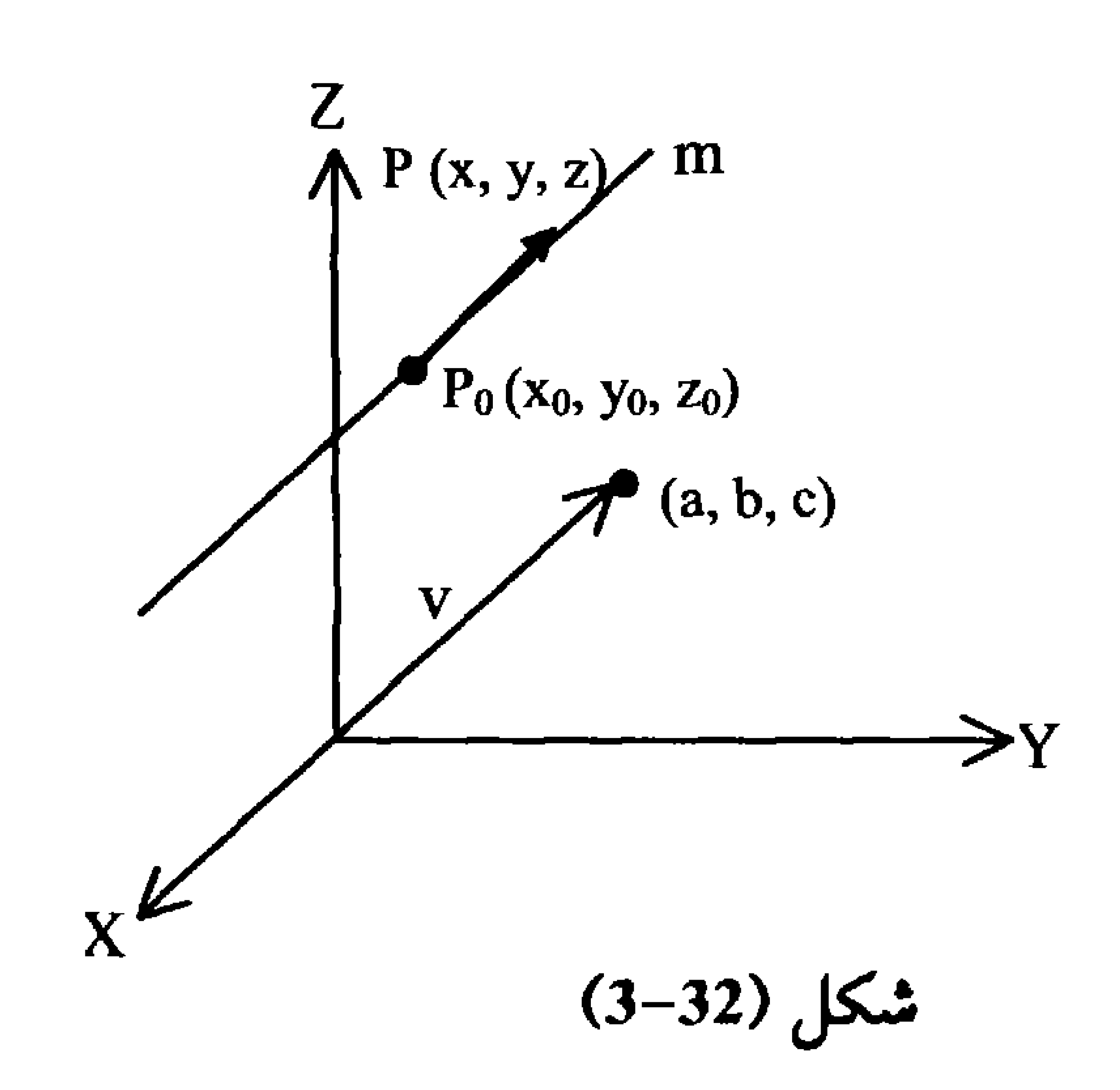
$x-2y-5z-20=0$



شكل (3-31)

<u>المستقيمات في فضاء-3</u>: نوضح في هذا الجـزء طريقتـين لإيجـاد معادلـة المسـتقيم في المستوى.

<u>الطريقة الأولى</u>: ليكن m مستقيم مـا يمـر بالنقطـة $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ وموازيــاً للمتجـه $v = (a, b, c)$ المستقيم m يتكون من تلـك النقـاط $P\ (x, y, z)$ الــتي يكــون فيــها المتجــه P_0P موازياً للمتجه v، أي أن:



شكل (3-32)

$$P_0P = kv \quad \text{...} \quad (6)$$

حيث k عدد ثابت.

أي:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = k\ (a, b, c)$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ka, kb, kc)$$

وبالمقارنة بين المركبات:

$x = ka + x_0 \Leftarrow x - x_0 = ka$

$y = kb + y_0 \Leftarrow y - y_0 = kb$ .... (7)

$z = kc + z_0 \Leftarrow z - z_0 = kc$

هذه المعادلات تسمى المعادلات الوسيطة.

مثال (4):

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2, 2, 1) وموازياً للمتجه $v = (a, b, c)$.

الحل:

المعادلات الوسيطة هي:

$z = 1 - t \quad , \quad y = 2 - t \quad , \quad x = 2 + 2t$

مثال (5):

أوجد المعادلات الوسيطة للمستقيم m المار بالنقطتين $P(1, 2, 3)$ و $Q(3, 2, 1)$.

الحل:

بما أن المتجه $PQ = (2, 0, -2)$ يوازي المستقيم m والنقطة $P(1, 2, 3)$ تقع على m فإن $z = 3 - 2t\ ,\ y = 2 + 0t\ ,\ x = 1 + 2t$ $(-\infty \le t \le \infty)$

تمرين: أين يقطع المستقيم m المستوى xy.

الجواب: المستقيم m يقطع المستوى في النقطة عندما $z = 3 - 2t = 0$ أي عندما $t = \frac{3}{2}$. وبالتعويض عن t في المعادلات الوسيطة، نحصل على $x = 1 + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 4$ و $y = 2$ و $z = 0$ عليه نقطة التقاطع هي (4, 2, 0).

مثال (6):

أوجد المعادلات الوسيطة لخط تقاطع المستويين:

$3x + 2y - 4z - 6 = 0$

$x - 3y - 2z - 4 = 0$

الحل:

خط تقاطع المستويين يتكون من جميع النقاط (x, y, z) التي تحقق المعادلتين، وبحل المعادلتين نجد:

$$x = \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t \quad , \quad y = \frac{-6}{11} - \frac{2}{11}t \quad , \quad z = t$$

الطريقة الثانية: ليكن $r\ (x, y, z)$ متجه ما من نقطة الأصل للنقطة $P\ (x, y, z)$ و $r_0\ (x_0, y_0, z_0)$ متجه من نقطة الأصل للنقطة $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ و $v = (a, b, c)$ متجه موازي للمستقيم m، كما في الشكل (3-33).

لذا:

$$P_0P = r - r_0$$

وبالتعويض في الصيغة $P_0P = kv$ نحصل على:

$$r - r_0 = kv$$

حيث k عدد ثابت.

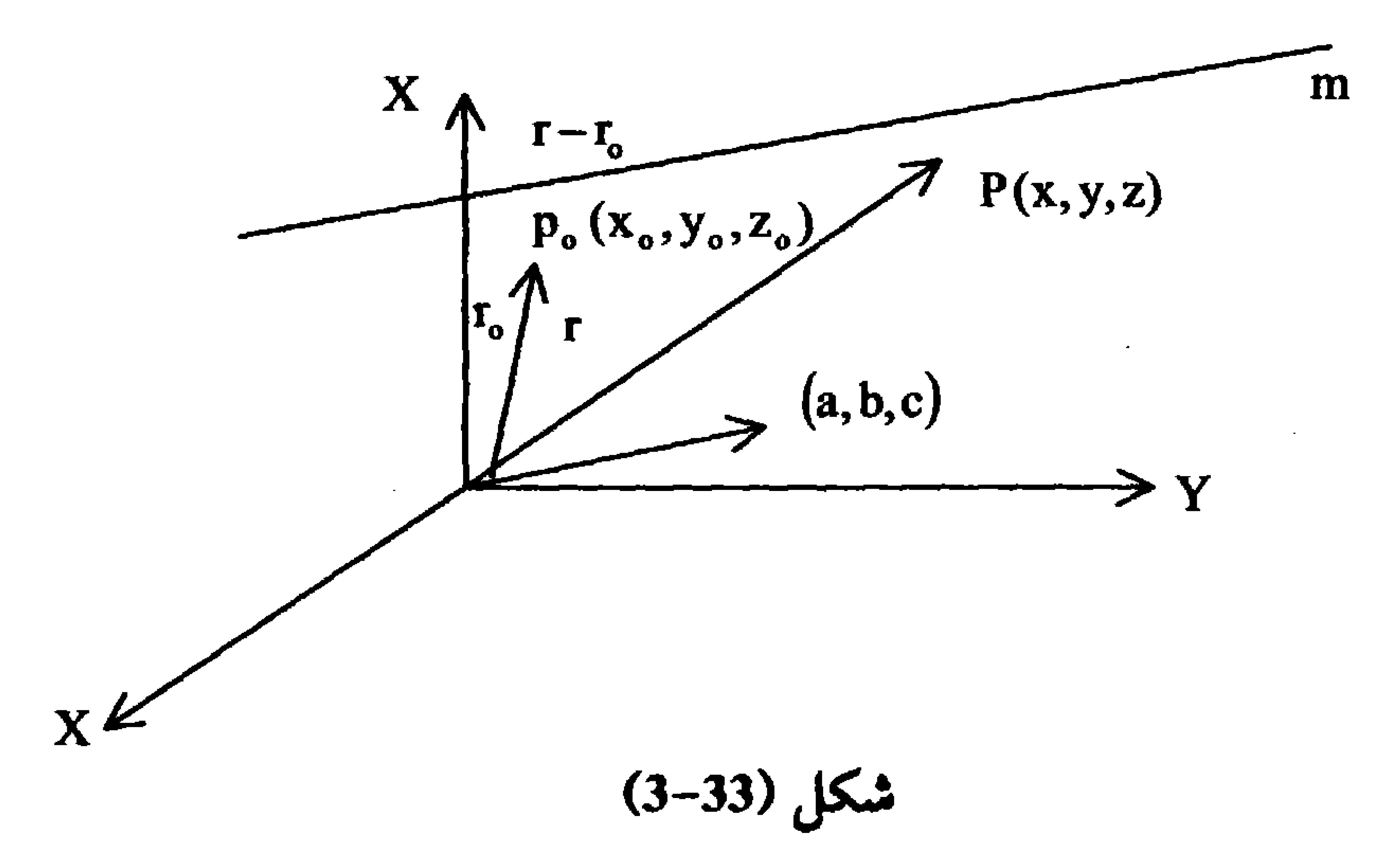
أو

$$r = r_0 + kv \quad (-\infty < k < \infty) \qquad (8)$$

هذه الصيغة تسمى بالصيغة الاتجاهية لمعادلة المستقيم في المستوى -3

مثال (7):

من المثال (4) معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, 2, 1)$ وموازياً للمتجه $(2, -1, -1)$ هي:



شكل (3-33)

$$(x, y, z) = (2, 2, 1) + (2, -1, -1)\,k$$

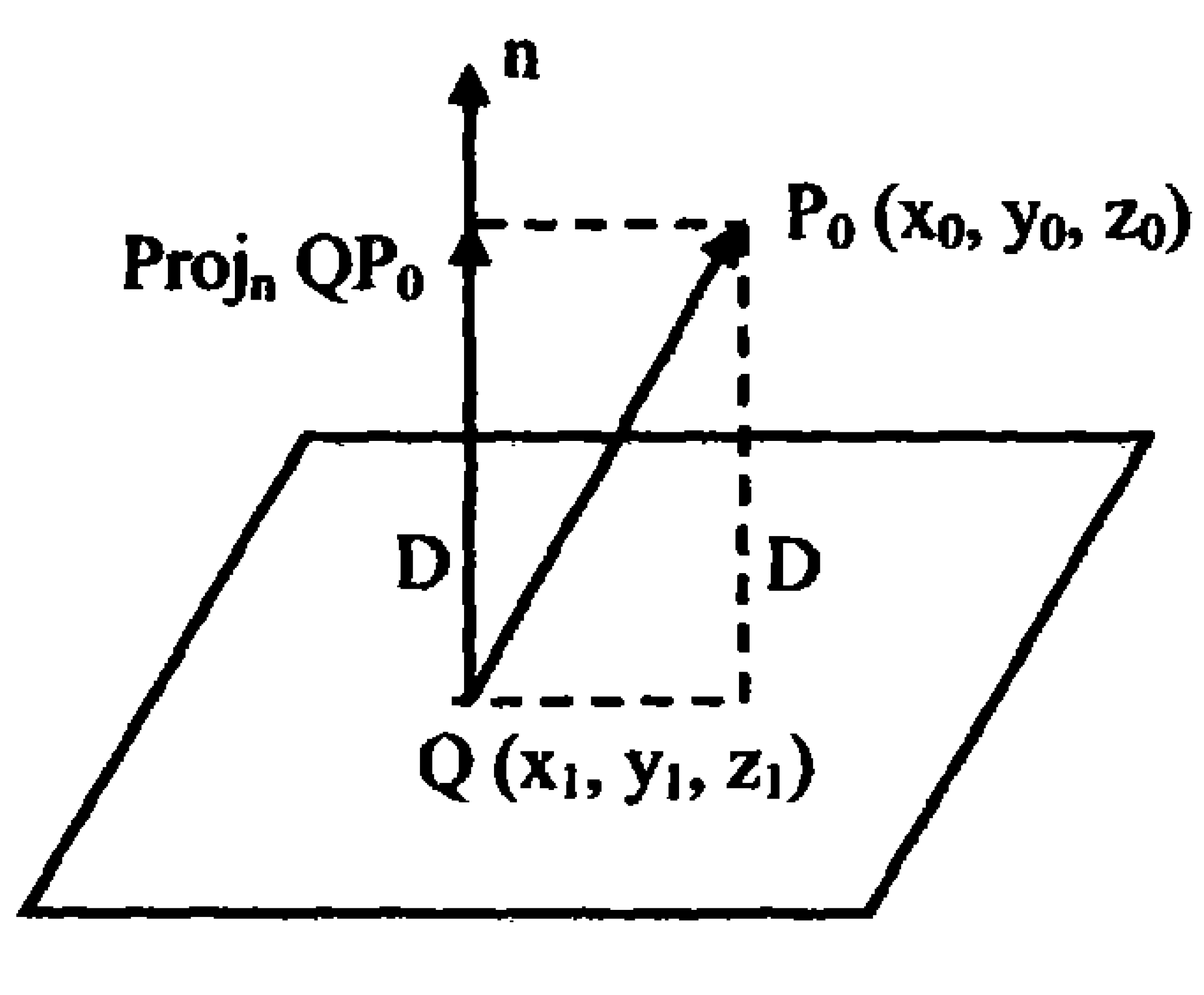
المسافة من نقطة معلومة لمستوى معلوم:

لتكن $P(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة $ax + by + cz + d = 0$ المستوى المعلوم فـإن المسافة D بين النقطة والمستوى.

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{.......} \quad (9)$$

البرهان:

نفرض $Q(x_1, y_1, z_1)$ نقطة واقعـة في المستوى. نرسم المتجه $n = (a, b, c)$ عمودياً علـى المسـتوى في النقطـة Q (الشكل 3-34). المسافة D تساوي طـول المسقط العمـودي للمتجه QP_0 علـى n. بوساطة الصيغة (9) بند (3-3):



شكل (3-34)

$$D = \|\text{proj}_n QP\| = \frac{|QP_0 . n|}{\|n\|}$$

لكن

$QP_0 = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$

$QP_0 . n = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$

$\|n\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$D = \frac{| a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{.................................... (10)}$$

لكن $Q(x_1, y_1, z_1)$ واقعة في المستوى، فإن إحداثياتها تحقق معادلة المستوى

$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$

أو:

$d = ax_1 - by_1 - z_1$

وبتعويض هذه الصيغة هذه في (10) نحصل على (9).

ملاحظة:

لاحظ التشابه بين (9) وصيغة المسافة بين نقطة معلومة ومستقيم معلوم (صيغة 12 بند 3-3).

مثال (8):

أوجد المسافة من النقطة $P(1, -4, -3)$ للمستوى $2x - 3y + 6z = 0$

الحل:

هنا $n = (2, -3, 6)$ (الناظم) العمود على المستوى

$$D = \frac{|2(1) - 3(-4) + 6(-3) - 1|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{|-14|}{7} = 2$$

مثال (9):

أوجد المسافة بين المستويين المتوازيين:

$x + 2y - 2z = 3$

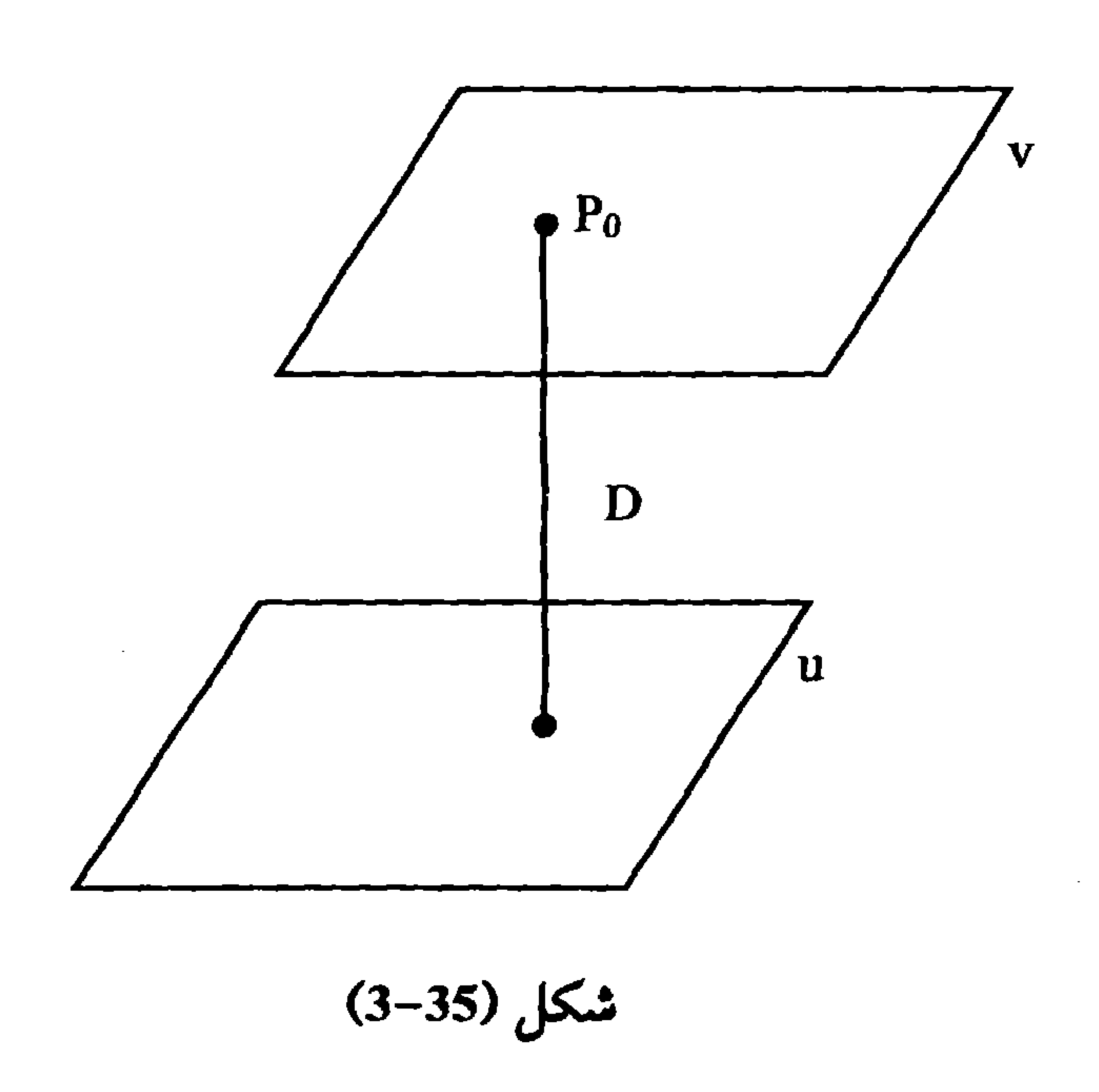
$2x + 4y - 4z = 7$

الحل:

المستويان متوازيين لأن أعمدتهما (الناظمين) $n_1 = (1, 2, -2)$ و $n_2 = (2, 4, -4)$ متجهات متوازيين (شكل 35-3).

لإيجاد المسافة بين المستويين نختار نقطة معينة في إحدهما ونوجد المسافة بين النقطة والمستوى الآخر، بفرض $y = z = 0$ في المعادلة $x + 2y - 2z = 3$ نحصل على $P_0\,(3, 0, 0)$ في هذا المستوى. وبوساطة الصيغة (9) فإن المسافة D من P_0 إلى المستوى $2x + 4y - 4z = 7$

$$D = \frac{|(2)(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$



شكل (35-3)

تمارين بند (5-3)

1. أوجد المستوى المار بالنقطة $(2, 5, 1)$ والناظم $n = (1, -2, 3)$.

2. أوجد معادلة المستوى المار بالنقاط $P (1, 2, 1)$ و $Q (-2, 3, -1)$ و $R (1, 0, 4)$.

3. جد معادلة المستوى الذي عموده $n = (-1, 7, 6)$ ويمر بالنقطة $(2, b, 1)$.

4. جد معادلة المستوى المار بالنقطة $(2, -1, 3)$ ويوازي $2x - 3y + z = 7$

5. أوجد المعادلات الوسيطة للمستقيم المار بالنقطة P وموازياً للمتجه n حيث $P (-2, 3, -3)$ و $n = (6, -6, -2)$.

6. هل أن المستقيم $z = 1 + 2k$ و $y = 3 - 2k$ و $z = -2 - 4t$ والمستوى $2x + 3y - z = 0$ متعامدان.

7. أوجد نقطة تقاطع $z = 3 + k$ و $y = 1 - k$ و $x = 9 - 5k$ مع المستوى $2x - 3y + 4z + 7 = 0$

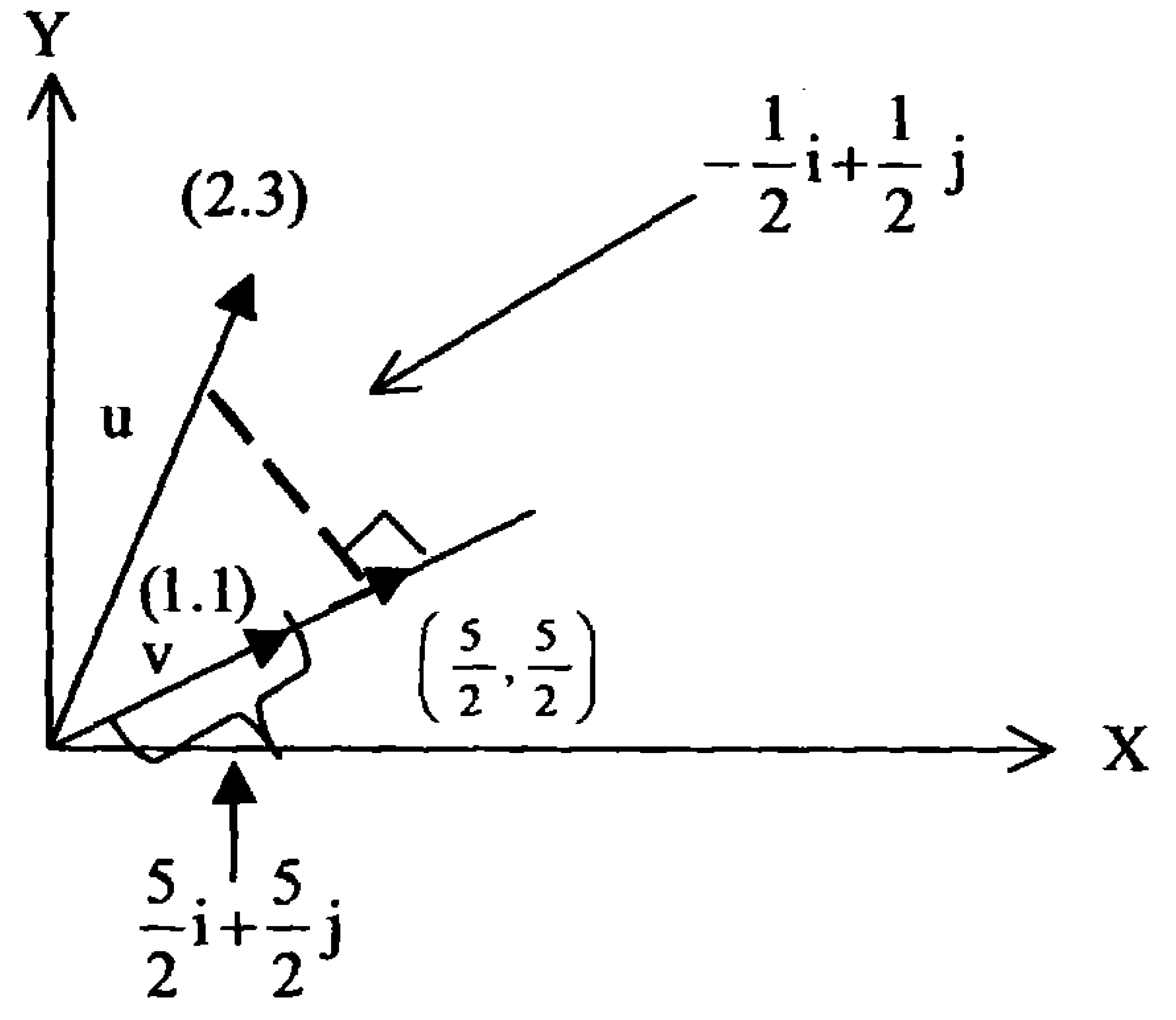
8. أوجد طول المسافة من النقطة $(2, -1, 4)$ للمستوى $3x - y + 7z = 2$

تمارين محلولة

1- ليكن $u= 2i + 3j$ ، $v = i+j$، احسب $Proj_v u$

الحل:

من الشكل المقابل نحصل على:



$$proj_v u = \frac{(u.v)}{\|v\|^2} v$$

$$= \left[\frac{5}{(\sqrt{2})^2}\right] V$$

$$= \frac{5}{2} i + \frac{5}{2} j$$

2 - أوجد مركب u باتجاه v يمكن إيجاده من الصيغة:

$$u - proj_v u = (2.3) - (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$$

$$= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} i + \frac{1}{2} j$$

3 - أفرض أن $u = 2i+3i+k$ و $v = i+2j - 6k$ أوجد:

1. $Proj_v u$

2. $u - Proj_v u$

الحل:

$$\text{proj}_v\, u = \frac{u_o\, v}{\|v\|^2}\, v$$

$$= \frac{2}{4}(1,2,-6) = \frac{2}{41}i + \frac{4}{41}j - \frac{12}{41}k$$

$$u - \text{proj}_v\, u = (2.3.1) - (\frac{2}{41}, \frac{4}{41}, -\frac{12}{41})$$

$$= (2 - \frac{2}{41}, 3 - \frac{4}{41}, 1 - \frac{12}{41})$$

$$= (\frac{8.0}{41}i + \frac{119}{41}j + \frac{29}{41})$$

4 – أوجد متجه الوحدة باتجاه المتجه $v = (2, 4,-3)$

الحل:

$$\|V\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$$

عليه:

$$u = \frac{v}{\|v\|} = (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}})$$

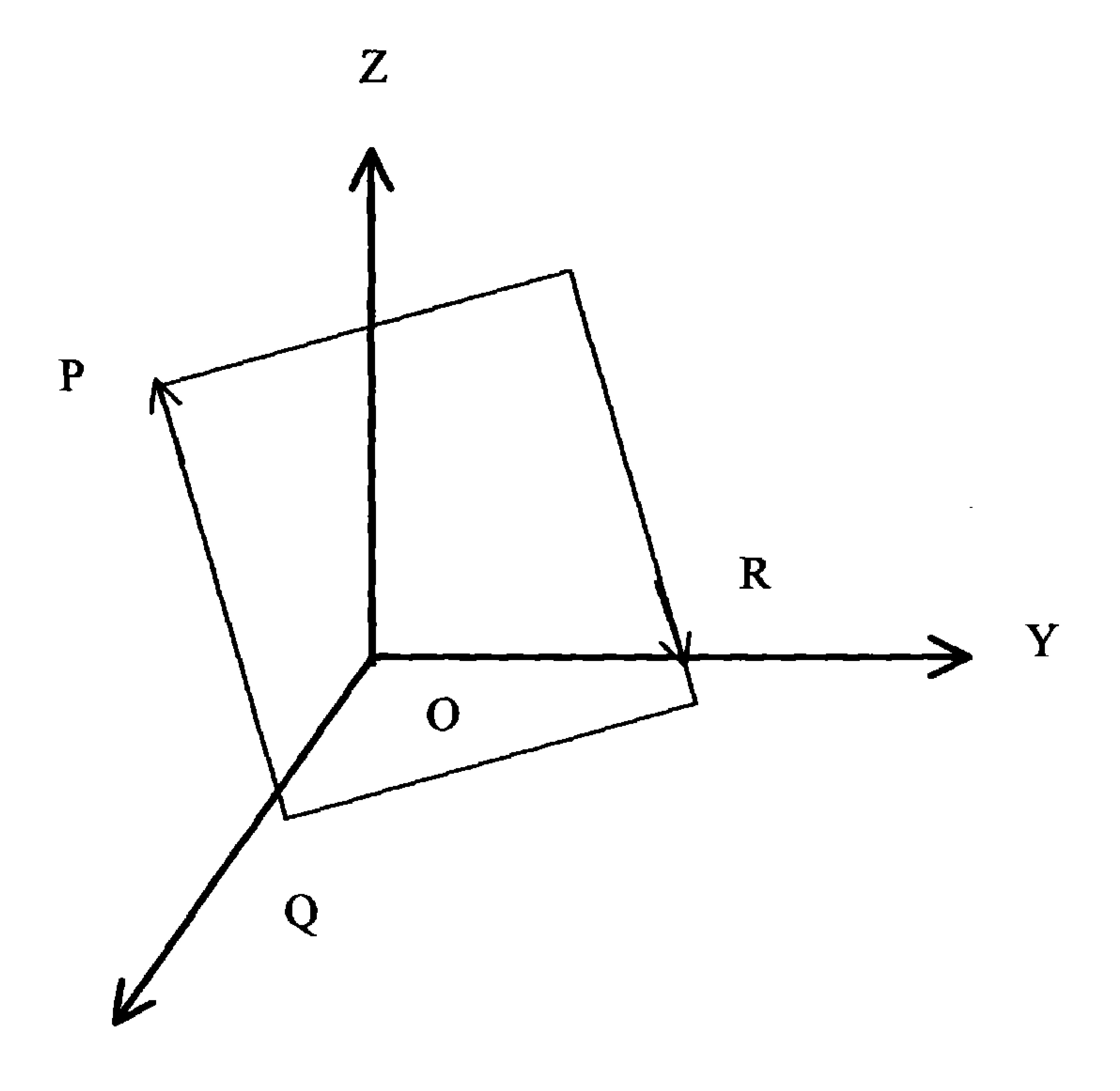
هو متجه الوحدة لأنه:

$$\|u\| = \frac{4}{29} + \frac{16}{29} + \frac{9}{29} = 1$$

5 – أوجد معادلة المستوى المار بالنقاط $p(1, 2, 1)$ و $p(-2, 3,-1)$ و $Q(-2 ، 3 ، -1)$ و $R(1, 0, 4)$.

الحل:

النقاط الثلاث غير المتطابقة تكون مستوي لأنها تكون متجـهين غـير متوازيـين والتي تتقاطع في نقطة.



المتجهين $PQ = -3i + j - 2k$

و $QR = 3i - 3j + 5k$

يقعان في المستوى ولذا فإنهما متعامدان مع الناظم n بحيث:

$n = PQXQR$

$$= \begin{bmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix} = -i + g\,j + 6k$$

∴ معادلة المستوي:

$$-(x-1) + 9(y-2) + 6(z-1) = 0$$

أو:

$$-x + g\,y + 6z = 23$$

6 – أوجد المستوى المار بالنقطة (2, 5, 1) الذي ناظمه $n= i - 2 j + 3 k$.

الحل:

بتطبيق الصيغة (2) بند (3,5) مباشرة نحصل على:

$$(x-2)-2(y-5)+3(z-1)=0$$

أو

$$x-2y+3z=-5$$

7. أوجد المعادلات الوسيطة للمستقيم L المار بالنقطتين P (2, 4, -1) و Q (5,0,7).

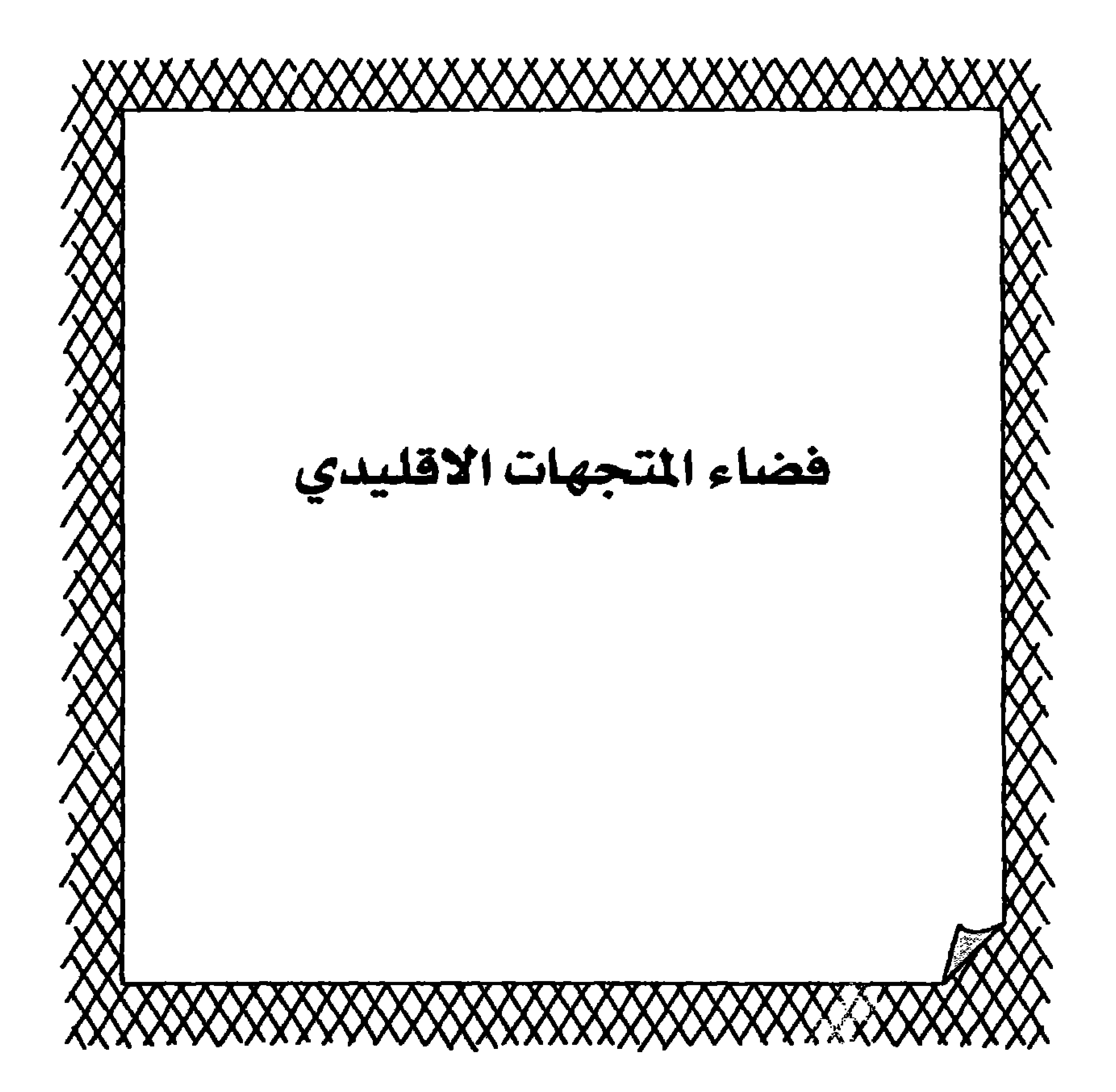
الحل:

بما أن المستقيم PQ (3,-4,8) يوازي L و P (2,4,-1) تقع على L، فإن المعادلات الوسيطة:

$$x=2+3t \quad ، \quad y=4-4t \quad ، \quad Z=-1+8t \quad (-\infty<t<\infty)$$

(لاحظ الصيغة [(7) بند(3.5)].

الفصل الرابع



فضاء المتجهات الاقليدي



الفصل الرابع

فضاء المتجهات الإقليدي

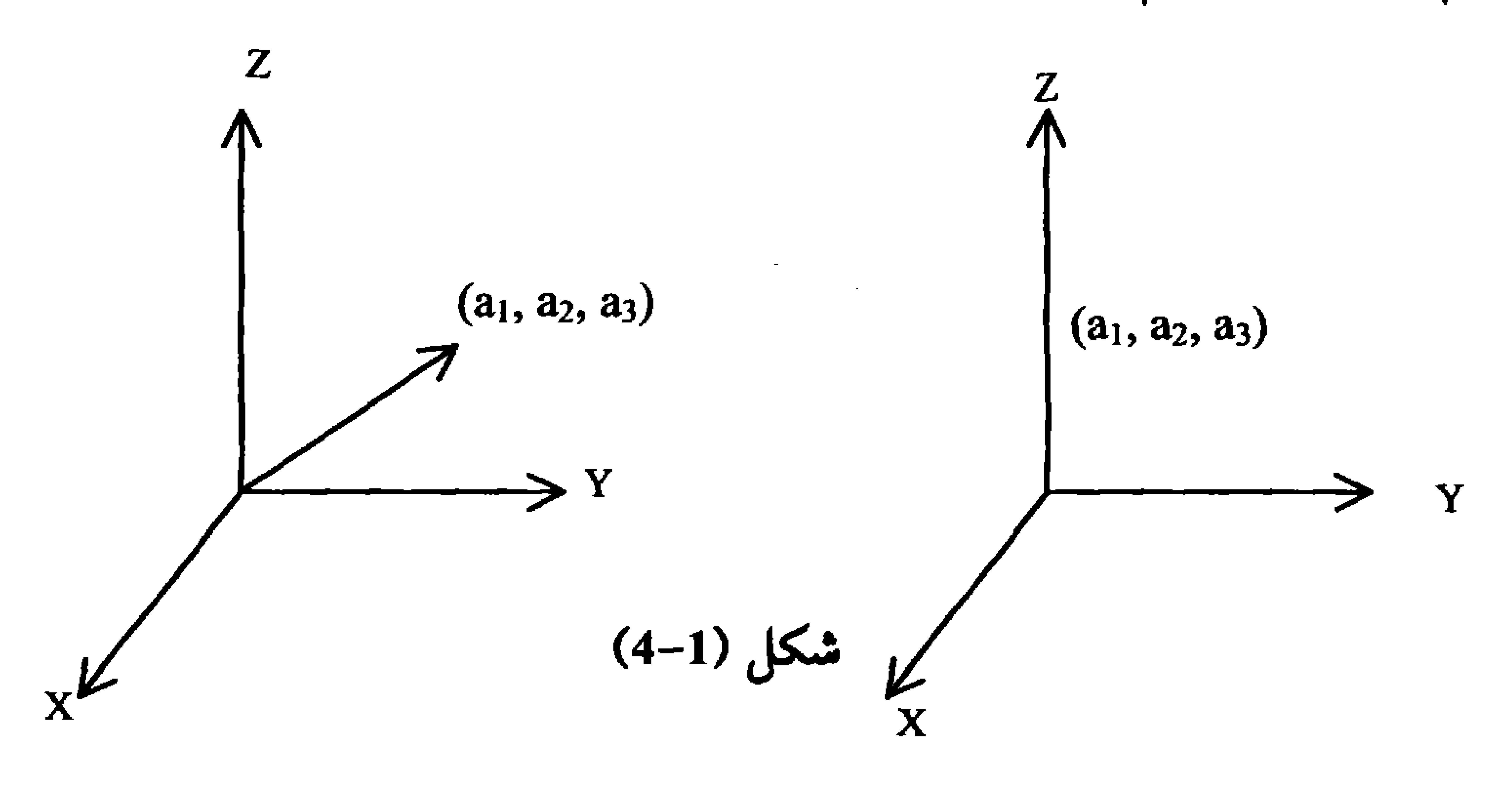
درسنا في الفصل السابق المتجهات في فضاء -2 وفضاء -3. سنكرس هذا الفصل لدراسة الفضاء الإقليدي النوني.

4-1 الفضاء الإقليدي النوني:

تعريف (4-1-1):

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. المرتب فئة n هو متتابعة n من الأعداد الحقيقية $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. مجموعة المرتبات فئة n تسمى الفضاء النوني ويرمز له R^m.

عندما n يساوي 2 أو 3 فإننا نطلق التعبير الزوج المرتب أو الثلاثي المرتب بدلاً من المرتب فئة 2 والمرتب فئة 3. من خلال دراستنا للفصل السابق لاحظنا أن الرمز (a_1, a_2, a_3) له تفسيرات هندسية أما يمثل نقطة أحداثياتها a_1 و a_2 و a_3 أو أنه متجه مركباته a_1 و a_2 و a_3 لذا من الممكن اعتبار المرتب فئة n، $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ على أنه تعميم للنقطة أو تعميم للمتجه (شكل 1-4).



شكل (1-4)

تعريف (4-1-2):

(1) المتجهان $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ و $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ في R^n متساويان، إذا كانت مركباتهما المتناظرة متساوية، أي:

$$v_n = u_n , \dots , v_2 = u_2 , v_1 = u_1$$

(2) جمع المتجهات v و u، يكتب $v + u$، هو متجه مركباته عبارة عن جمع مركبات v و u المتناظرة. أي:

$$v + u = (v_1 + u_1 , v_2 + u_2 , \dots , v_n + u_n)$$

(3) ضرب المتجه v بكمية ثابتة k، يكتب kv، هو متجه مركباته هي مركبات v مضروبة في k، أي:

$$Kv = k (v_1, v_2 , \dots , v_n) = (kv_1 , kv_2 , \dots , kv_n)$$

المتجه الصفري في R^n يكتب 0 ويعرف $(0, 0, \dots, 0) = 0$، إذا كان $V = (v_1, v_2, \dots , v_n)$ R^n فإن (-v) هو متجه، يقال له المعكوس الجمعي للمتجه v، ويعرف:

$$V = (-v_1, -v_2, \dots - v_n)$$

طرح المتجهات في R^n هو:

$$v - u = v + (-v)$$

أو:

$$v - u = (v_1 - u_1, v_2 - u_2 , \dots , v_n - u_n)$$

مبرهنة (4-1-3):

إذا $v = (v_1, v_2, \dots , v_n)$ و $u = (u_1, u_2 \dots , u_n)$ و $w = (w_1, w_2, \dots , w_n)$ متجها في R^n. l, k كميات ثابتة، فإن:

1. $v + u = u + v$
2. $v + (u + w) = (v + u) + w$

3. $v + 0 = 0 + v = v$

4. $v + (-v) = 0$ أي $v - v = 0$

5. $k (1 v) = (kl) = 0$

6. $k (v + u) = kv + ku$

7. $(k + l) v = kv + lv$

8. $1.v = v$

البرهان: (تمرين)

ملاحظة:

بموجب مبرهنة (3-1-4) يمكن التعامل بالمتجهات من دون استخدام مركباتها، فمثلاً لحل المعادلة $x + u = v$ تضيف النظير $-u$ للطرفين:

$$x + u + (-u) = v + (-u)$$

$$x + (u - u) = v - u$$

$$x + 0 = v - u$$

$$x = v - u$$

تعريف (4-1-4):

لتكن $v = (v_1, v_2, \dots , v_n)$ و $u = (u_1, u_2, \dots , u_n)$ متجهان في R^n. الضرب الداخلي الإقليدي (الضرب النقطي)، يكتب $v.u$، يعرف:

$$v.u = (v_1u_1 + v_2u_2 + \dots + v_nu_n)$$

مثال (1):

لتكن $v = (-1, 2, 3, 1)$ و $u = (0, 1, 2, 4)$ متجهات في R^4 فإن:

$$v.u = (-1) (0) + 2 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 4 = 12$$

مبرهنة (4-1-5):

لتكن v و u و w متجهات في R^n و k ثابت فإن:

1. $v.u = u.v$
2. $(v + u) . w = v . w + u. w$
3. $(kv) . u = k (v.u)$
4. $v.v \geq 0$ ؛ $v.v$ إذا وفقط $v = 0$ كذلك

البرهان:

نبرهن 2 و 4 إما 1 و 3 فنترك كتمارين.

$$(v + u) . w = (v_1 + u_2 , v_2 + u_2 , \ldots , v_n + n) . (w_1, w_2, \ldots ,w_n)$$

$$= (v_1 + u_1) w_1 + (v_2 + u_2) w_2 + \ldots + (v_n + u_n) w_n$$

$$= (v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots + v_nw_n) + (u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n)$$

$$= v.w + u.w$$

$$v.v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \geq 0$$

المساواة في الصيغة هذه تكون صحيحة إذا وفقط إذا $v_1 = v_2 = \ldots = 0$

إذا وفقط إذا $v = 0$

تعريف (4-1-6):

1. الطول الإقليدي (المعيار الإقليدي) للمتجه $V = (v_1, v_2, \ldots , v_n)$، يكتب $\|v\|$، يعرف:

$$\|v\| = \sqrt{v.v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

2. المسافة الإقليدية بين النقطتين $v = (v_1, v_2, \ldots , v_n)$ و $u = (u_1, u_2, \ldots , u_n)$ في R^n، تكتب $d (v, u) = \|v - u\|$ وتعرف:

$$d (v, u) = \|v - u\| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \ldots + (v_n - u_n)^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

مثال (2):

نفرض $v = (3, 2, 1, 5)$ و $u = (0, 1, -1, 3)$ في R^4. أوجد طول u والمسافة بينهما.

$$\|u\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$d(v, u) = \sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2 + (1-(-1)^2 + (5-3)^2}$$

$$= \sqrt{91 + 4 + 4} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

ملاحظة:

يمكن تمثيل المتجه $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ في R^n بشكل مصفوفة صف أو مصفوفة عمود:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad \text{أو} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

لذا:

$$(v + u) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + u_1 \\ u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{bmatrix}$$

$$kv = \begin{pmatrix} kv_1 & kv_2 & \dots & kv_n \end{pmatrix}$$

إذا كتبنا v و u بشكل مصفوفة عمود $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \; u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

فإن:

$$u^T v = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

عليه فصيغة المصفوفات:

$$v.u = u^T v \quad \dots\dots (3)$$

مثال (3):

لتكن $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ فإن:

$$v.u = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (3 - 0 + 2 + 8) = (13)$$

$$= 13$$

مبرهنة (7-1-4):

(متباينة كوجي - شفارتز): لتكن $v = (v_1, v_2, \dots v_n)$ و $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ متجهات في R^n، فإن:

$$|v.u| \le \|v\| \, \|u\| \quad \dots\dots (4)$$

أو

$$|v_1 v_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n| \le \left(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \dots (5)$$

البرهان:

(نبرهن الحالة الخاصة عندما v و u في R^2 أما الحالة العامة فسوف نناقشها في الفصول القادمة).

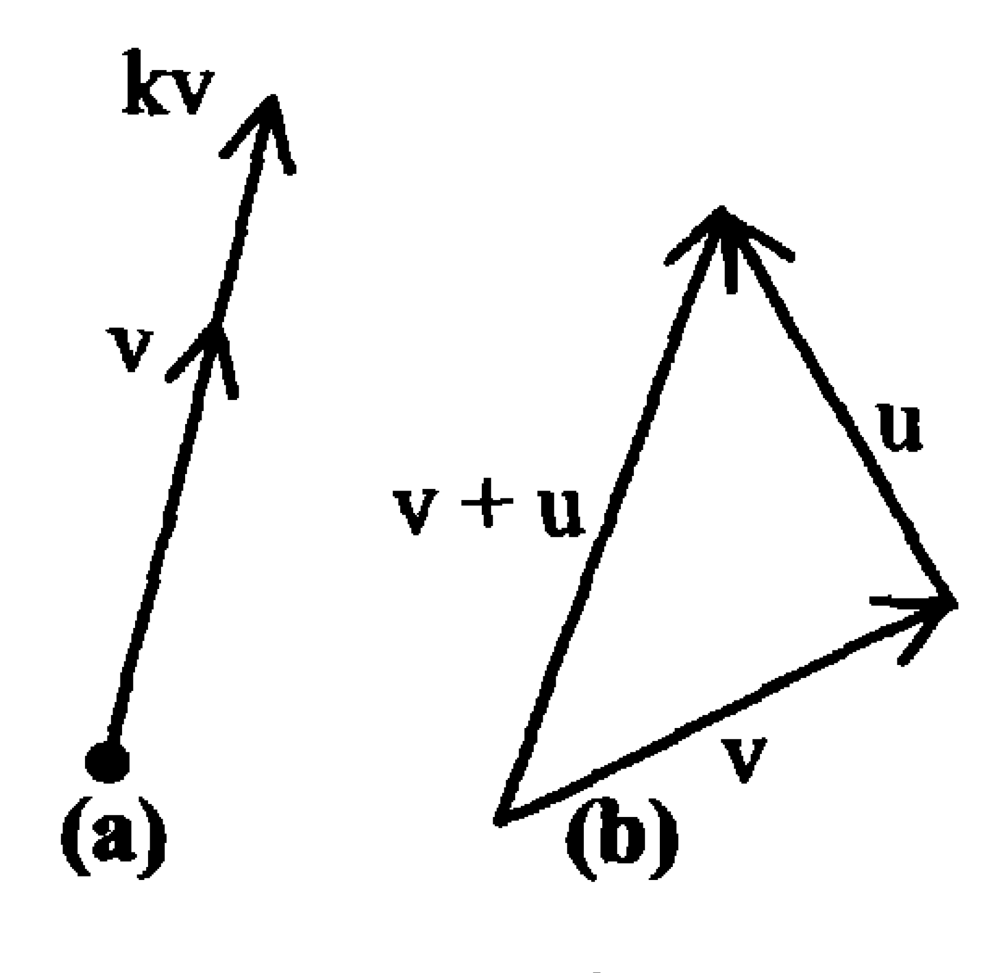
بموجب البند (3-3):

$$||v.u|| = ||v||\ ||u|| \cos \phi \leq ||v||\ ||u||$$

مبرهنة (8-1-4):

لتكن v و u متجهات في R^n و k كمية ثابتة، فإن:

1. $||v|| \geq 0$
2. $||v|| = 0$ إذا وفقط $v = 0$
3. $||kv|| = |k|\ ||v||$
4. $||v + u|| \leq ||v||\ ||u||$ (المتباينة المثلثية)



شكل (2-4)

البرهان:

نبرهن الصيغتين (3) و (4)

$$||kv|| = \sqrt{k^2 v_1^2 + k^2 v_2^2 + \ldots + k^n v_n^n}$$

$$= ||k|| \sqrt{v_1^2 +^2 v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

$$= |k|\ ||v||$$

(4) من شكل (2-4) (b).

$$||v + u||^2 = (v + u) . (v + u) = v . v + 2 (v . u) + u . u$$

$$\leq ||v||^2 + 2v + ||u||^2$$

$$\leq ||v||^2 + 2\ ||v||\ ||u|| + ||u||^2 = (\ ||\ v|| + ||u||\ )^2$$

عليه، وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين:

$$\| v + u \| \leq \| v \| \| u \|$$

بقية الصيغ تبرهن بنفس الطريقة.

مبرهنة (4-1-9):

لتكن v و u و w في R^n ، k كمية ثابتة، فإن:

1. $d(v, u) \geq 0$
2. $d(v, u) = 0$ إذا وفقط إذا $v = u$
3. $d(v, u) = d(u, v)$
4. $d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u)$

البرهان:

سنثبت المتباينة (رقم 4). أما الصيغ الثلاث الأخرى، فتترك كتمارين.

بموجب (2) والمبرهنة (4-1-8) يكون لدينا:

$$d(v, u) = \|v-u\| = \| (v - w) + (w - u) \|$$
$$\leq \| (v - w) \| + \| (w - u) \|$$
$$= d(v, w) + d(w, u)$$

مبرهنة (4-1-10):

إذا كانت v و u متجهات في R^n. فإن:

$$v.u = \frac{1}{4} \|v + u\|^2 + \frac{1}{4} \|v - u\|^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

البرهان:

لما كان:

$$\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + 2 (v.u) + \|u\|^2$$

$$\|v - u\|^2 = \|v\|^2 - 2\,(v.u) + \|u\|^2$$

وبطرح العلاقتين سنحصل:

$$v.u = \frac{1}{4}\ \|v + u\|^2 + \frac{1}{4}\ \|v - u\|^2$$

تعريف (4-1-11):

يقال للمتجهين v و u في R^n بأنهما متعامدان إذا:

$$v.u = 0$$

مبرهنة (4-1-12) (فيتاغورس):

إذا تعامد المتجهات v و u في R^n فإن

$$\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$$

$$\|v + u\|^2 = (v+ u)\ .\ (v + u) = \|v\|^2 + 2\,(v.u) + \|u\|^2$$

$$= \|v\|^2 + \|u\|^2$$

(لأن v و u متعامدان).

مثال (4):

لتكن v و u كما في المثال 3 فإن:

$$1.\ \|v + u\| = \|\,(3, 0, 1, 2) + (1, -1, 2, 4)\,\|$$

$$= \|\,(4, -1, 3, 6)\,\|$$

$$= \sqrt{16+1+3+36}$$

$$= \sqrt{62} = 7.87$$

$$\|v\| + \|u\| = \|\,(3, 0, 1, 2)\,\| + \|\,(1, -1, 2, 4)\,\|$$

$$= \sqrt{9+0+1+4} + \sqrt{1+1+4+16}$$

$$= \sqrt{14} + \sqrt{22} = 3.74 + 4.69 = 8.43$$

عليه فإن $\|v + u\| \le \|v\| + \|u\|$

2. $v.u = (3, 0, 1, 2) . (1, -1, 2, 4)$

$= 3 + 0 + 2 + 8 = 13$

$\frac{1}{4} \|v + u\|^2 = \frac{1}{4} \|(3, 0, 1, 2) + (1, -1, 2, 4)\|^2 = \frac{1}{4} \|4, -1, 3, 6\|^2$

$= \frac{1}{4} (16 + 1 + 9 + 36) = \frac{1}{4} (62)$

$\frac{1}{4} \| v - u\|^2 = \frac{1}{4} \|(3, 0, 1, 2) , (1, -1, 2, 4)\|^2$

$= \frac{1}{4} \|(2, 1, -1, -2)\|^2 = \frac{1}{4} (4 + 1 + 1 + 4)$

$= \frac{1}{4}(10)$

$\frac{1}{4} \|v + u\|^2 + \frac{1}{4} \|v - u\| = \frac{1}{4} (62) + \frac{1}{4} (10) = \frac{1}{4} (72) = 13$

$v . u = \frac{1}{4} \|v + u\| + \frac{1}{4} \|v - \|$

3. $\|u\| = \sqrt{1+1+4+16} = \sqrt{22}$, $\|v\| = \sqrt{9+0+1+4} = \sqrt{13}$

ولكن $|v.u| = 13$

$|v.u| = 13$

$\|v\| \|u\| = \sqrt{13}\sqrt{22} = \sqrt{13 \times 22} = \sqrt{286} = 16.9$

(4) المسافة الإقليدية: $d (v, u) = \sqrt{(3-1)^2 + (0+1)^2 + (1-2)^2 + (2-4)^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{10} = 3.16$

مثال (5):

إذا $v = (4, 2, -1)$ و $u = (-1, 3, 2)$ متجهات في R^3 فإن:

$v.u = 4 \times (-1) + 2 \times 3 + (-1) \times 2 = -4 + 6 - 2 = 0$

عليه فإن v و u متعامدان.

$$\|v + u\|^2 = \| (4, 2, 1) + (-1, 3, 2) \|^2$$
$$= \| (3, 5, 1) \|^2 = \left(\sqrt{9 + 25 + 1}\right)^2 = 35$$
$$\|v\|^2 = \left(\sqrt{16 + 4 + 1}\right)^2 = 21$$
$$\|u\|^2 = \left(\sqrt{11 + 9 + 4}\right)^2 = 14$$

عليه:

$$\|v + u\|^2 = 35 = \|v\|^2 + \|u\|^2 = 21 + 14 = 35$$
$$\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$$

لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$ بموجب خواص المنقولة والصيغة $v.u = u^T v$ نحصل على:

$$Av.u = u^T (Av) = (u^T A) v = (A^T u)^T v = v . A^T u \quad \text{.............} (7)$$
$$v. Au = (Au)^T v = (u^T A^T) v = u^T (A^T v) = A^T v.u \quad \text{.............} (8)$$

مثال (6):

لتكن $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

برهن أن:

1) $Av . u = v.A^T u$.

2) $v.Au = A^T v.u$

الحل:

$$Av = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Av.u = \begin{pmatrix} 25 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = (25)\, 0 + (-1)\,(2) + 6\,(-4)$$

$$= -26$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T u = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$v.A^T u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -14 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} = 14 + 20 - 60 = -26$$

عليه فإن:

$$Av.u = v.A^T u$$

وبنفس الأسلوب نبرهن:

$$A.Au = A^T v.u$$

ملاحظة:

الضرب النقطي يساعدنا في تعريف طريقة جديدة لضرب المصفوفـات، فمثـلا إذا كانت متجهات صفوف A هي $r_1, r_2, ..., r_n$ و متجهات أعمدة B هي $c_1, c_2, ... c_n$ فإن ضرب المصفوفات AB:

$$AB = \begin{bmatrix} r_1.c_1 & r_1.c_2 & \cdots & r_1.c_n \\ r_2.c_1 & r_2.c_2 & \cdots & r_2.c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_m.c_1 & r_m.c_2 & \cdots & r_m.c_n \end{bmatrix}$$

عليه، فالنظام الخطي $AX = B$ يمكن كتابته بصيغة الضرب النقطي:

$$\begin{bmatrix} r_1 \bullet x \\ r_2 \bullet .x \\ r_m \bullet x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \text{.......} \qquad (9)$$

إذ أن $r_1, r_2, \dots, r_n$ متجهات صفوف A و $b_1, b_2 \dots b_n$ عناصر B.

مثال (7)

اكتب النظام الآتي بشكل ضرب نقطي:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$3x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 7$$

$$x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0$$

الحل:

بموجب الشكل (9):

$$\begin{pmatrix} (2,-3,1) & \bullet & (x_1, x_2, x_3) \\ (3,-6,-4) & \bullet & (x_1, x_2, x_3) \\ (1,4,-8) & \bullet & (x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

تمارين بند (4-1)

1. احسب الطول الإقليدي للمتجهات الآتية:

a. (2, -1, 3, -3, 1) b. (2, -2, 3) c. (3, 4, -2, -1)

2. لتكن w = (-1, 2, 3, 4) , u = (0, 4, 1, 2), v = (2, 1, 3, -1) أوجد:

a. $||v + u||$ b. $||v|| + ||u||$ c. $||-3v|| + ||u||$

3. أثبت أن طول $\left(\frac{1}{||v||}v\right)$ يساوي 1 لكل متجه غير صفري في R^n.

4. إذا كان v = (-3, 2, 2, 6) أوجد k بحيث $||kv|| = 10$

5. أوجد الضرب الداخلي الإقليدي v.u، إذا كانت v = (-2, 1, 0, 3) و u = (3, -1, 2, 1)

6. برهن أن:

$$||v + u||^2 + || v - u||^2 = 2 ||v||^2 + 2 ||u||^2$$

7. أوجد k بحيث أن v و u متعامدان إذا كان v = (0, -1, 2, 3) و u = (1, 7, k)

8. أوجد المسافة الإقليدية بين v و u إذا علمنا أن v=(0, -1, 2, 3) و u=(-3, 2, 1, 1)

9. برهن أن v . (ku) = k (v.u) حيث v و u في R^n و k كمية ثابتة.

4-2 التحويلات الخطية من R^n إلى R^m:

سنبحث في هذا الفصل نوع من الدوال بالشكل $y = F(x)$ حيث x متغير مستقل يمثل متجه في R^n و y متغير غير مستقل يمثل متجه في R^m. هذا النوع من الدوال يسمى التحويلات الخطية، والتي كثيرا ما تستخدم في علوم كثيرة، لجبر الخطي، الفيزياء، الهندسة، العلوم الاجتماعية وفي مختلف فروع الرياضيات.

تتذكر عزيزي القارئ أن الدالة هي عبارة عن قاعدة f ترفق كل عنصر من عناصر المجموعة A مع واحد وعلى الأكثر واحد من عناصر B. فإذا رافقت f العنصر y مع العنصر x فإن $y = f(x)$، وفي هذه الحالة نقول أن y هو صورة x بتأثير f أو $f(x)$ هي قيمة f في x.

المجموعة A تسمى منطلق f و B تسمى المدى. إذا كان R^n هو منطلق f ومداها هو R^m حينئذ نسمى f تطبيق من R^n إلى R^m وتكتب: $f: A \to B$. (الدالة والتطبيق لهما نفس المعنى. نستخدم التطبيق في حالة تمثيل f هندسيا ودالة في حالة تمثيل f جبريا). في حالة $m = n$ تسمى f عملية.

مثال (1):

لتكن $F: R^3 \to R^2$ تحويلة والمعرفة:

$$F(x, y, z) = (x + 2y - 4z , 2x + 3y + z)$$

فإن صورة النقطة $(4, 5, -2)$ هي:

$$F(4, 5, -2) = [4 + 2(5) - 4(-2) , 2(4) + 3(5) + (-2)]$$

$$= (4 + 10 + 8 , 8 + 15 - 2)$$

$$= (22, 21)$$

إذن $F(4, 5, -2) = (22, 21)$

مثال (2):

نفرض $F: R^2 \rightarrow R^2$ عملية معرفة بالشكل:

$$F(x, y) = (3y, 2x)$$

$$F(4, -5) = (3 \times 5 , 2 \times 4)$$

$$= (-15, 8)$$

لتكن $f_1, f_2, \dots, f_n$ دوال القيمة الحقيقية للمتغيرات الحقيقية التي عددها n، لنقل:

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \dots\dots (1) \\ &\vdots \\ w_m &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

لذا فإن المعادلات التي عددها m أعلاه تعين النقطة الوحيدة $(w_1, w_2, \dots, w_m)$ في R^m لكل نقطة $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ في R^n. لذا فإنها تسمى تحويلة من R^n إلى R^m. نرمز لهذه التحويلة F، لهذا $F: R^n \rightarrow R^m$ و:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

إذا كانت المعادلات أعلاه خطية فإن التحويلة $F: R^n \rightarrow R^m$ تسمى تحويلة خطية (أو عملية خطية إذا $m = n$).

لهذا فالتحويلة الخطية $F: R^n \rightarrow R^m$ نعرف بنظام المعادلات بالشكل:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \quad \dots\dots (2) \\ &\vdots \\ w_n &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

أو بنظام المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \dots\dots(3)$$

بمعنى آخر:

$$W = AX \quad \dots\dots (4)$$

ملاحظة:

المصفوفة A تسمى المصفوفة الأساسية للتحويلة الخطية F، و F تسمى مضروبة في A.

إذا كانت A مضروبة التحويلة F فبالإمكان التعبير عن $F: R^n \rightarrow R^m$ بالشكل $F_A: R^n \rightarrow R^m$. لهذا:

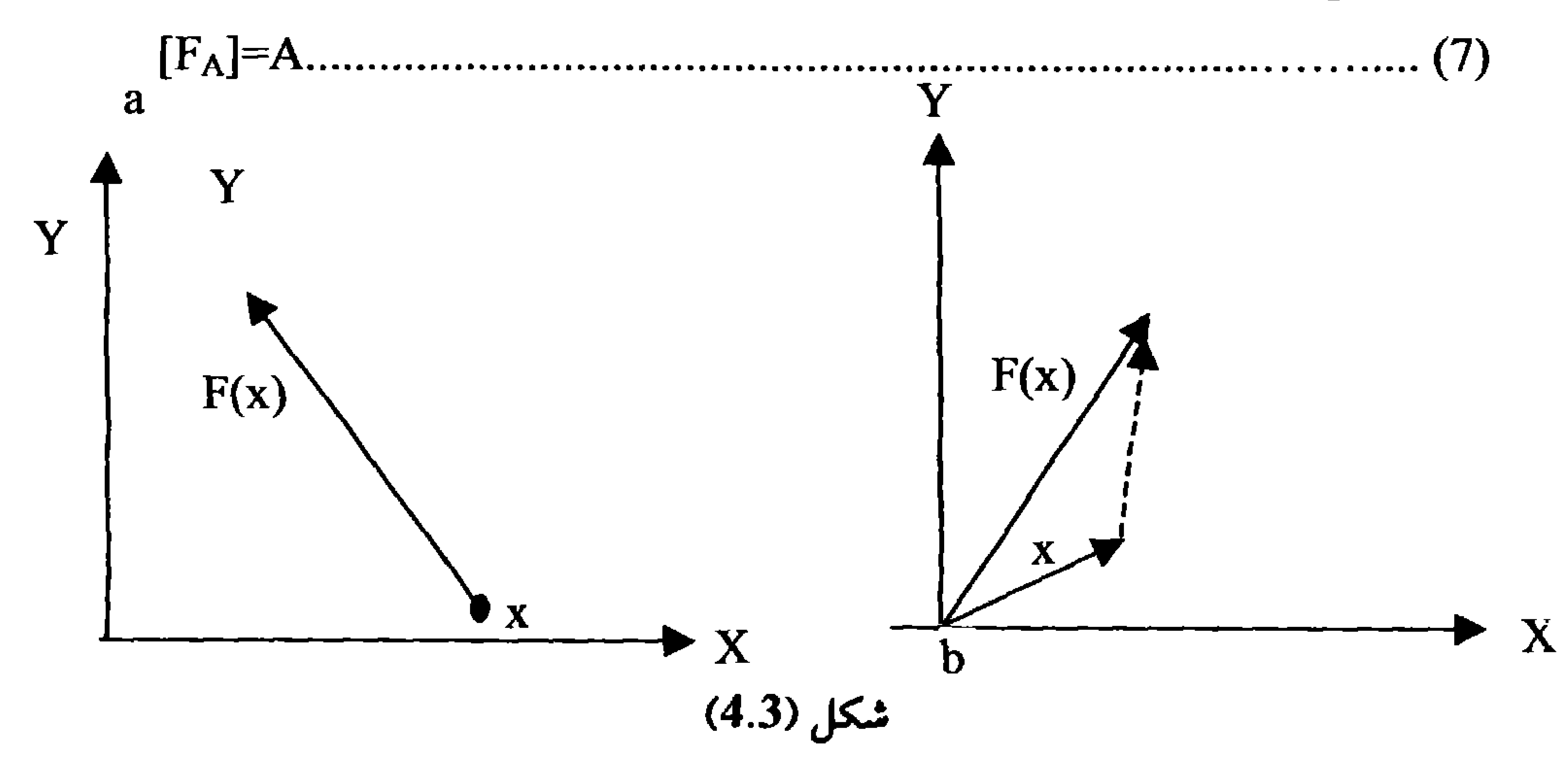
$$F_A (x) = AX \quad \dots\dots (5)$$

يمكن التعبير عن المصفوفة الأساسية للتحويله F بالرمز [F]، لذا فالمعادلة (5) تأخذ الشكل:

$$F (x)=[F]_x \quad \dots\dots (6)$$

وبدمج العلاقتين للمصفوفة الأساسية نحصل على العلاقة

$$[F_A]=A \quad \dots\dots (7)$$



شكل (4.3)

وسط هذه الرموز من الضروري أن نضع في أذهاننا بأننا حصلنا على تقابل بين المصفوفات سعه $m\times n$ والتحويلات الخطية مـن R^n إلى R^m لكـل مصفوفـة A توجـد تحويلة خطية F_A (مضروبة A) مقابلة لها وبالعكس لكل تحويله خطيـة $F:R^n \to R^m$ توجد مصفوفة مقابلة لها سعتها $m\times n$.

[F] تسمى المصفوفة الأساسية للتحويلـة الخطـية F. التأثـير الهندسـي للعمليـة $F:R^2 \to R^2$ هو نقل نقطة (أو متجة) في R^2 إلى نقطـة جديـدة (أو متجـة)، شـكل (4.3) يوضح الحالتين.

أنواع العمليات الخطية:

1- عملية الانعكاس:

خذ العملية $F:R^2 \to R^2$ التي تنقل كـل متجـه في R^2 (المنطلـق) إلى صورتـه المناظرة حول المحور y. [الشكل (4.4)] إذا افترضنـا $w = F(x)$ فـإن المعـادلات الـتي تربط مركبات X و W هي:

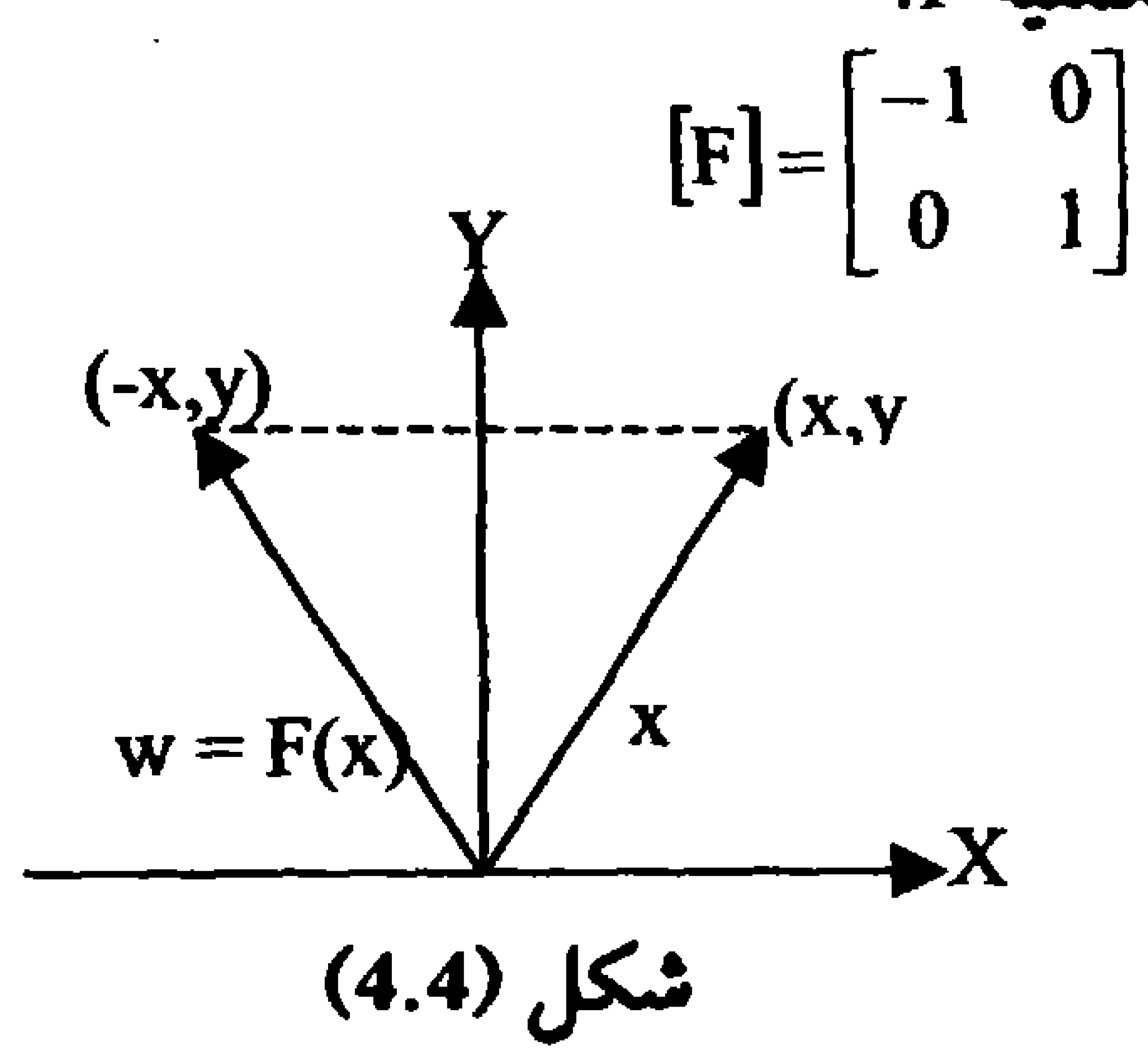
$$\begin{aligned} w_1 &= -x = -x + o \\ w_2 &= y = o + y \end{aligned} \quad \text{..........(8)}$$

وبشكل المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{..........(9)}$$

بما إن المعادلات في الصيغة (8) خطية، F، هي عملية خطية وفق الصيغة (9) المصفوفة الأساسية للعملية F:

$$[F] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



شكل (4.4)

وبصورة عامة العملية التي تنقل أي متجة إلى صورته المناظرة حول خط مستقيم ما أو مستوى ما تسمى عملية انعكاس.

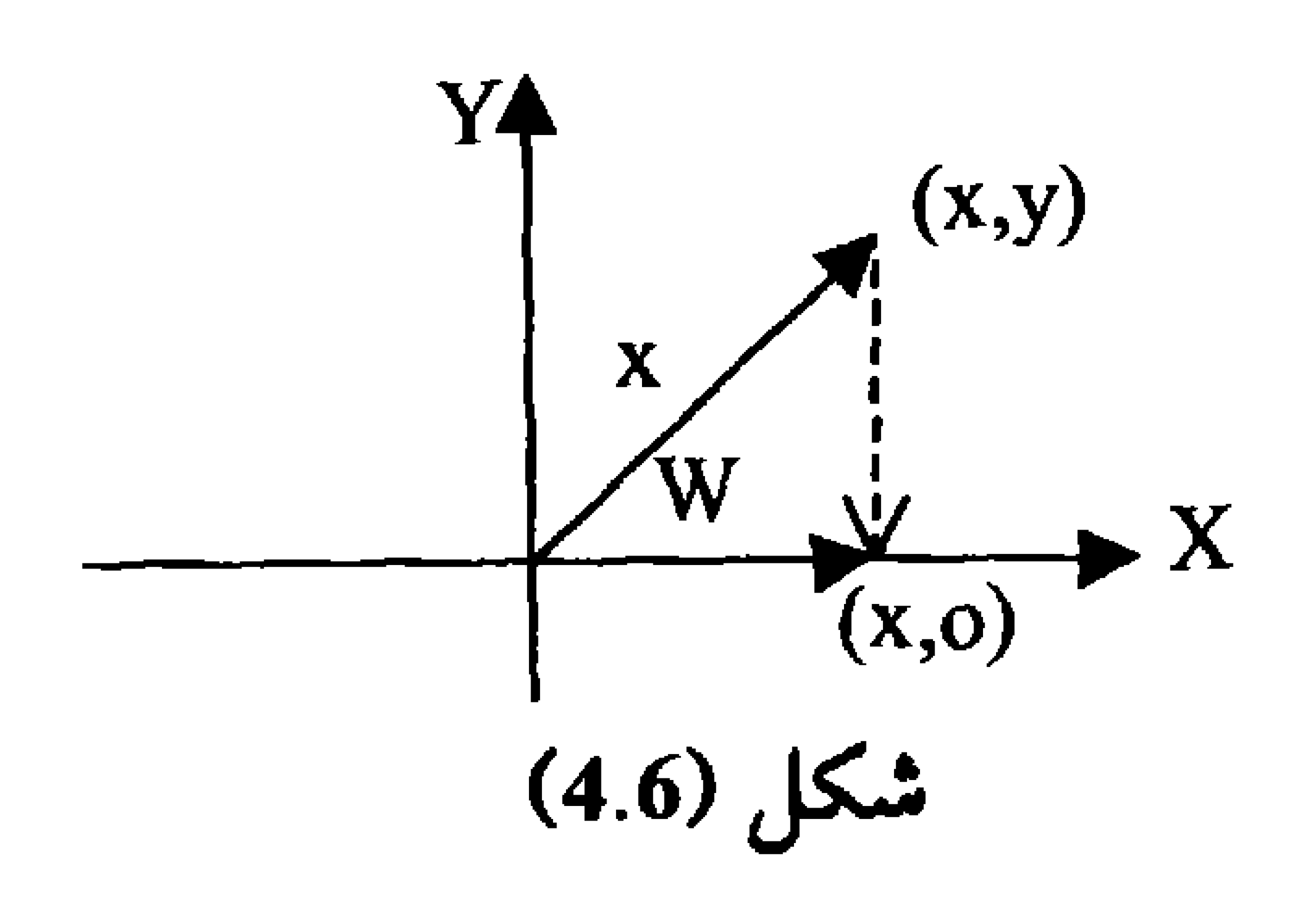
وفيما يلي بعض من أنواع الانعكاسات الخطية:

العملية	المعنى الهندسي	المعادلة w	المصفوفة الأساسية
انعكاس حول المحور y	Y, (-x,y), (x,y), x, w = F(x)	$w_1=-x$ $w_2=y$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
انعكاس حول المحور x	Y, (x,y), x, (x,-y), w = F(x)	$w_1=-x$ $w_2=y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
انعكاس حول المحور y = x	Y, (y,x), (y=x), w = F(x), (x,y), x	$w_1=-x$ $w_2=y$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

شكل (4.5)

تمرين:

إذا كانت $F:R^3 \to R^3$ عملية انعكاسيه حول المستوى x_z. أوجد [F] مع الرسم. [تلميح $(x,y,z) \to (x,-y,z)$].



شكل (4.6)

2- العمليات الاسقاطية:

إذا كان $F:R^2 \to R^2$ عملية تنقل كل متجه على مسقطة العمودي حول خط مستقيم أو مستوي ما خلال نقطة الأصل. فأن F تسمى عملية اسقاطية تعامدية. المعادلات التي تربط بين مركبات x و $w = F(x)$ هي $w_1 = x = x + o.y$ و $w_2 = o = o + oy$ والشكل المصفوفي $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$، بما ان الشكل هو خطي فأن F عملية خطية والمصفوفة الأساسية هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [F]$ بصورة عامة العملية الاسقاطية هي العملية التي تنقل أي متجة الى مسقطة العمودي على المستقيم أو المستوى [شكل 4.6]

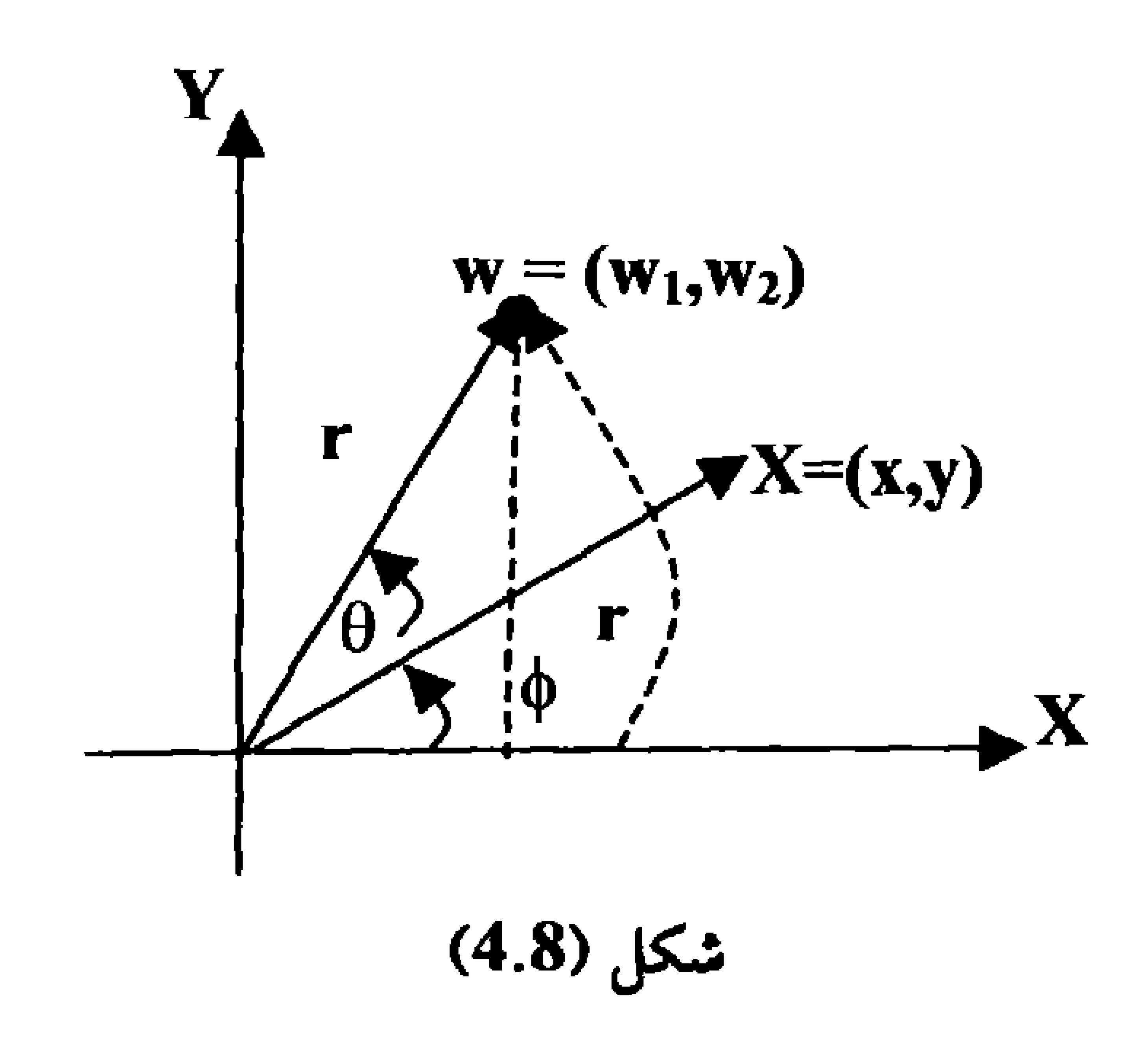
العملية	المعنى الهندسي	المعادلة w	المصفوفة الأساسية
عملية عمودية على المحورX	Y, (x,y), x, w, (x,o), x	$w_1=x$ $w_2=o$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
عملية عمودية على المحور y	Y, (x,y), (o, y), w, x, x	$w_1=o$ $w_2=y$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

جدول يوضح بعض المساقط المهمة

شكل (4.7)

تمرين:
لتكن $F: R^3 \to R^3$ عمليـة إسـقاطية علـى المسـتوى xy. أوجـد [F] [تلميـح $(x,y,z) \to (x,y,o)$].

3- العملية التدويرية: العملية التي تدور كل متجة في R^2 خـلال زاويـة ثابتـة مثـل θ، تسمى عملية التدويرية، لاحظ الشكل (4.8).



شكل (4.8)

ليكن التدوير عكس دوران عقارب الساعة. لإيجاد المعادلات التي تربط مركبات x و w = F(x).

نفرض Φ هي الزاوية من المحور الموجب x على X ولتكن r طول كل من x و w [شكل 4.8].

من الشكل (4.8):

$w = r\sin\Phi$ و $x = r\cos\Phi$ ....(10)

$w_2 = r\sin(\Phi+\theta)$ و $w_1 = r\sin(\Phi+\theta)$ و ....(11)

باستخدام قوانين المثلثات:

$$w_1 = r\cos\phi\cos\theta \;\; - r\sin\phi\,\sin\theta$$
$$w_2 = r\sin\phi\,\mathrm{con}\,\theta \;\; + r\cos\phi\sin\theta$$

وبالتعويض عن (14)، نحصل:

$$\begin{aligned} w_1 &= x\,\cos\theta - y\sin\theta \\ w_2 &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \quad \text{..............................(12)}$$

المعادلات في (12) خطية، لذا فإن F عملية خطية، علاوة على ذلك، نستنتج من هذه المعادلات أن المصفوفة الأساسية هي:

$$[F] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

الجدول التالي يوضح ذلك:

المصفوفة الأساسية	المعادلة w	المعنى الهندسي	العملية
$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$	y, w = (w1,w2), (x.y), w, θ, x, x	تدوير خلال الزاوية θ

شكل (4.9)

مثال (3):

إذا دارت متجهات R^2 بزاوية 45 درجة، فإن صورة $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ هي w حيث:

$$w = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x & - & \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x & + & \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{bmatrix}$$

وعندما $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ فإن:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & - & 1 \\ 1 & + & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

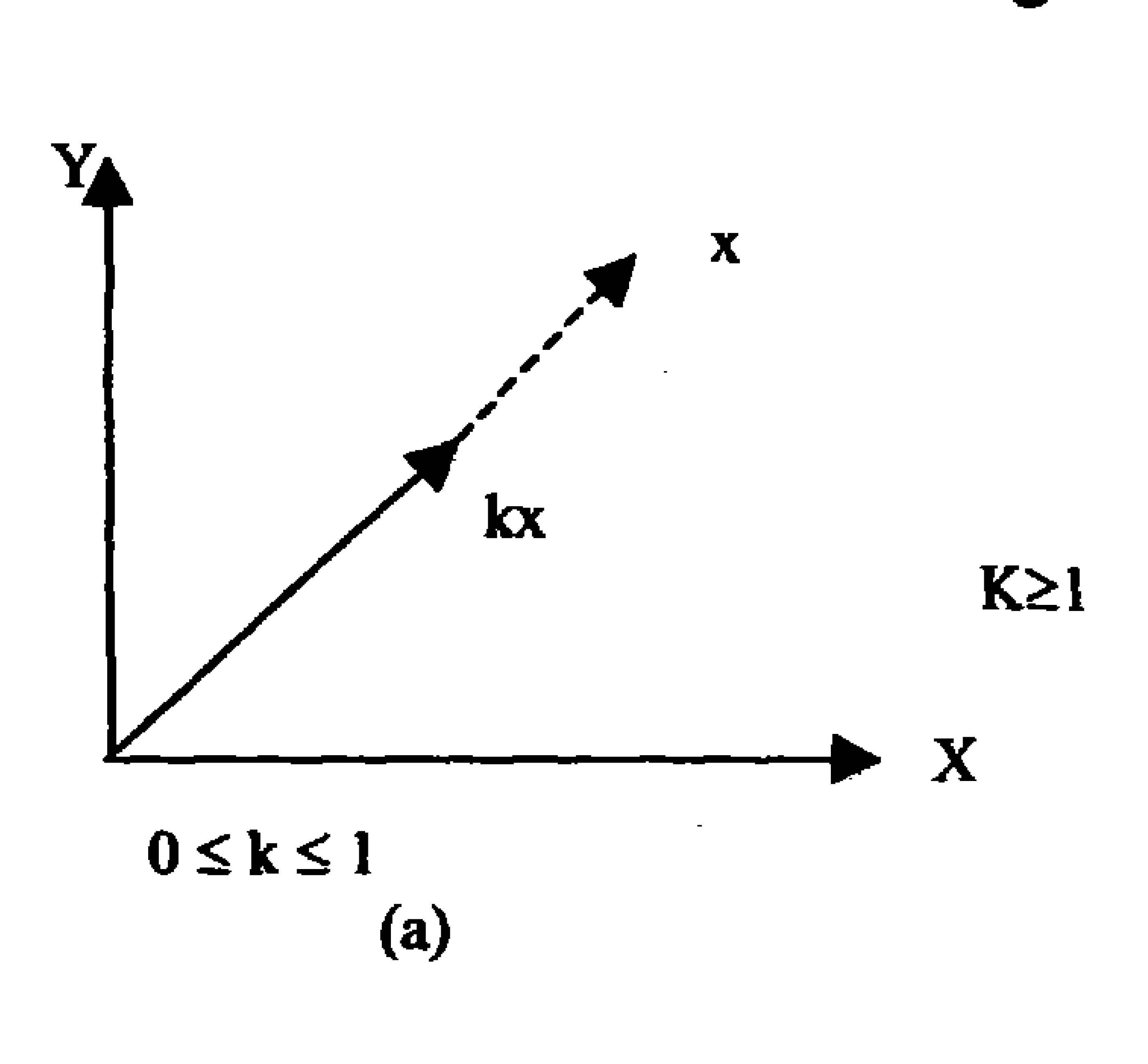
4- عمليات التمدد والانكماش:

لتكن k كمية ثابتة و $F: R^n \to R^n$ عملية معرفة بالشكل $F(x) = kx$:

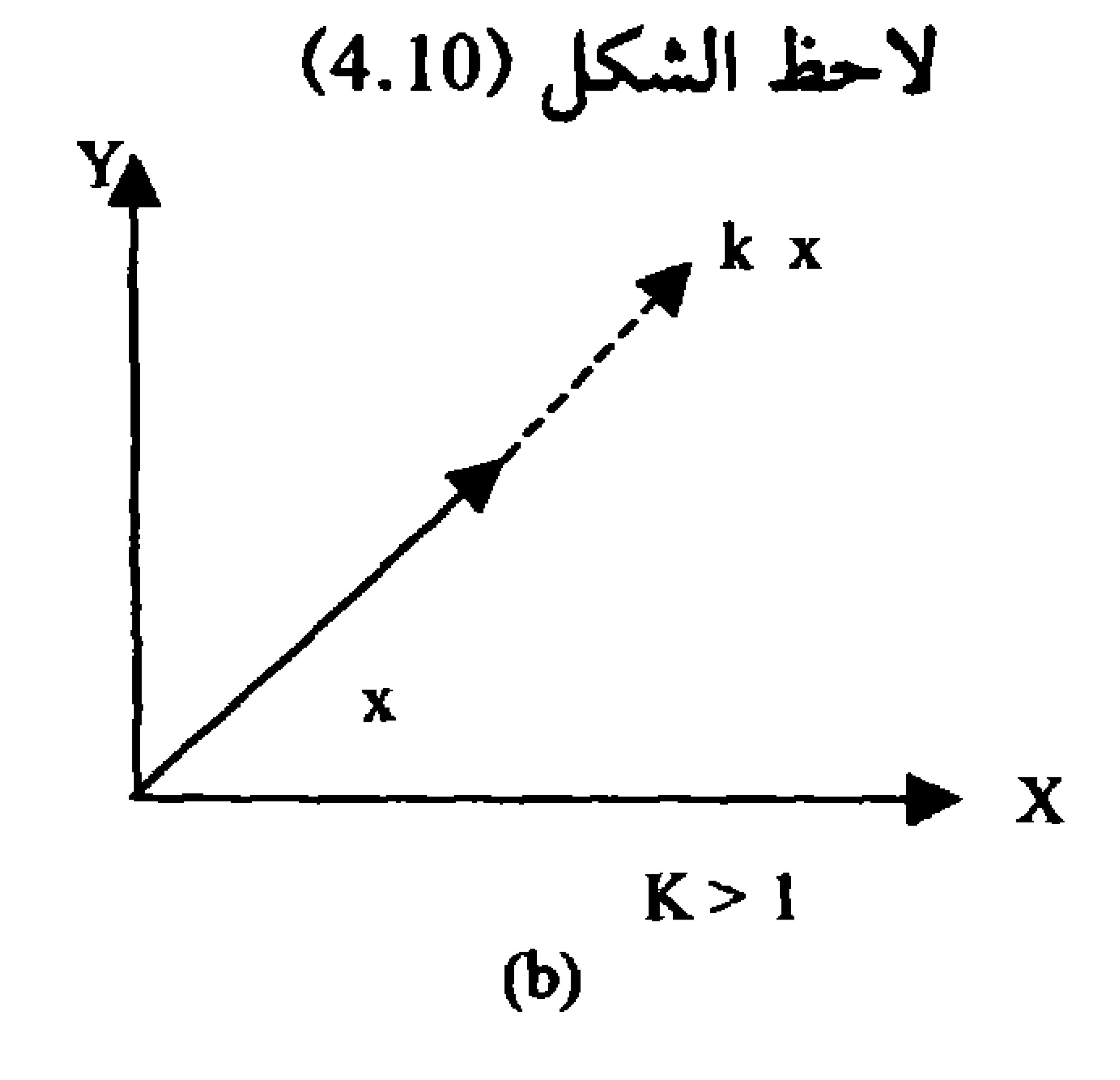
1- إذا كانت $0 \le k \le 1$ فإن F تسمى انكماش [شكل (4.10)a]:

2- إذا كانت $K \ge 1$ فإن F تمدد [شكل (4.10) b].

لاحظ الشكل (4.10)



K≥1



شكل (4.10)

ملاحظة:

عندما k=0 فإن $F(x) = kx$ تؤول للصفر، أي أن $F(x) = 0$.

إذا $k = 1$ فإن $F(x) = kx$ تؤول للعملية المحايدة.

فمثلا في حالة الانكماش (عندما $0 \le k \le 1$)، فإن: $w = F(x)$

أي:

$$w_2 = ky \ , \ w_1 = kx$$

بمعنى آخر المصفوفة الأساسية هي $[F]=\begin{bmatrix} k & o \\ o & k \end{bmatrix}$

أما في حالة التمدد، عندما $k \ge 1$، فإن $F(s) = k\,x$، أي أن المصفوفة الأساسية هي نفسها $\begin{pmatrix} k & o \\ o & k \end{pmatrix}$ ولكن $k \ge 1$. [لاحظ شكل (4.10)].

جدول يبين عمليات التمدد والانكماش...

العملية	المعنى الهندسي	المعادلة	المصفوفة الاساسية
انكماش مع k على R^2 حيث $o \le k \le 1$	y, x, (x,y), (k y, k y)	$w_1 = k\,x$ $w_2 = k\,y$	$\begin{bmatrix} k & o \\ o & k \end{bmatrix}$
تمدد مع k على R^2 حيث $k \ge 1$	y, x, (k y, k y), (x,y)	$w_1 = k\,x$ $w_2 = k\,y$	

شكل (11 – 4)

5 - تركيب التحويلات الخطية:

لتكن $F_A: R^n \to R^L$ و $F_B: R^L \to R^m$ تحويلات خطية، فإن لكل متجه $x \in R^n$ ، المتجه $F_A(x)$ في R^L، ومن ثم يمكننا حساب $F_B(F_A(x))$ التي هي متجه في R^m.

لذا فإن تطبيق F_A أولا ومن ثم تطبيق F_B ، يكون لنا تحويلة من R^n إلى R^m تسمى تركيب F_B مع F_A تكتب:

$$(F_B . F_A)(x) = F_B(F_A(x)) \quad \dots\dots(17)$$

هذه التحويلة هي تحويلة خطية لأن:

$$(F_B . F_A)(x) = F_B(F_A(x)) = B(Ax) = BA(x) \quad \dots\dots(18)$$

لذا $F_B \circ F_A$ مضروبة BA والتي هي تحويلة خطية. الصيغة (18) تخبرنا أن المصفوفة الأساسية للتحويلة $F_B \circ F_A$ هي BA، ويمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$F_B . F_A = F_{BA} \quad \dots\dots(19)$$

توجد صيغة بديلة للصيغة (19). إذا كانت $F_1: R^n \to R^L$ و $F_2: R^L \to R^m$ تحويلات خطية، فإن:

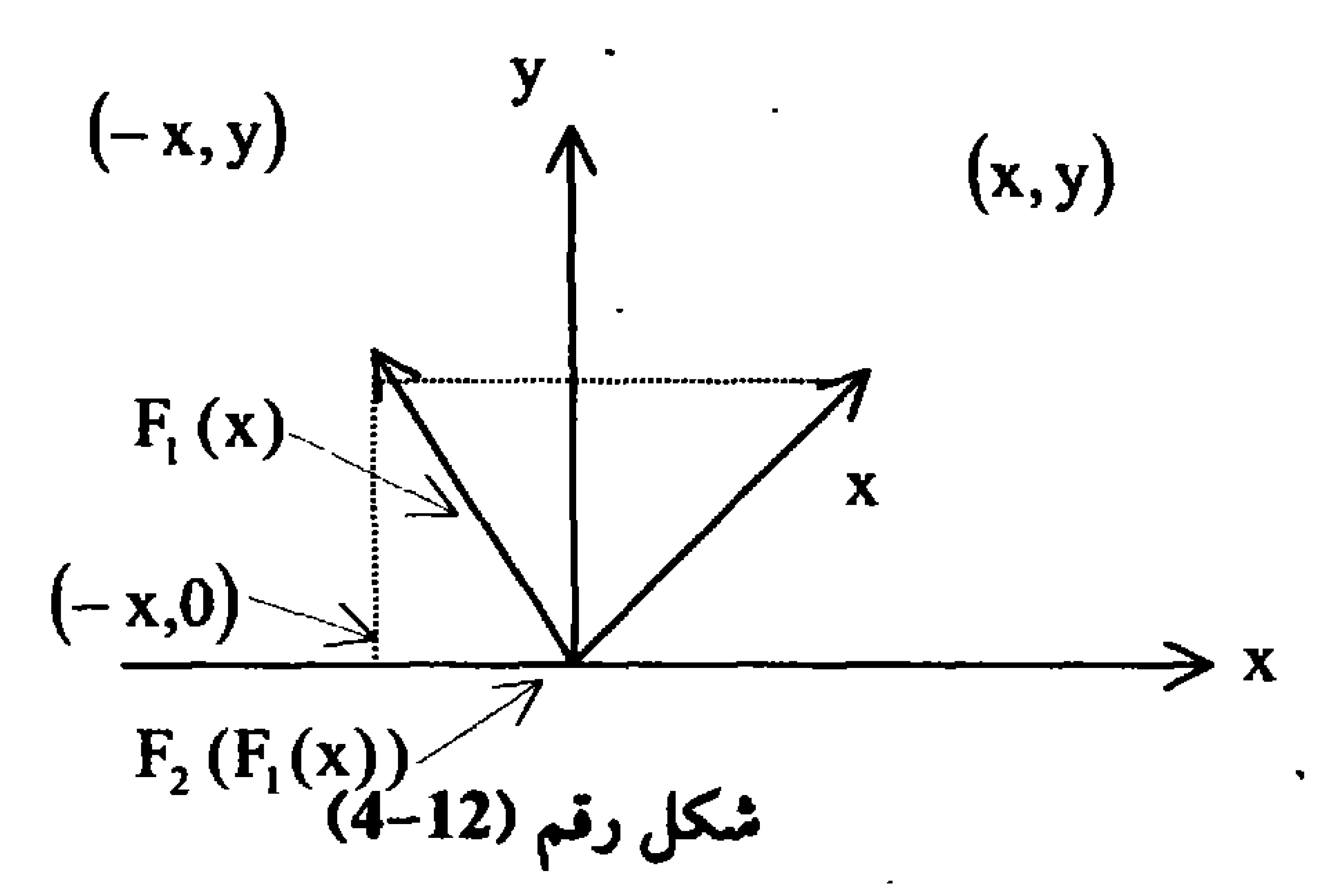
$$[F_2 \circ F_1] = [F_2][F_1]$$

وذلك لأن المصفوفة الأساسية للتركيب $[F_2 \circ F_1]$ تساوي ضرب المصفوفتين الأساسيتين لكل من F_1, F_2 على التوالي.

مثال (4):

نفرض أن $F_1: R^2 \to R^2$ عملية انعكاسية حول المحور $y = x$ و $F_2: R^2 \to R^2$ عملية إسقاطية عمودية على المحورy [الشكل (4.12)]، أوجد المصفوفة الأساسية للتركيب $[F_2 \circ F_1]$.

الحل:



شكل رقم (4-12)

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ومنها:

$$w_1 = -x = -x + oy$$
$$w_2 = y = o + y$$

ثم نجد $w_2 = F_2(x)$. أي:

$$w_1 = x + oy$$
$$w_2 = o.x + o.y$$

أي أن:

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة الأساسية هي:

$$[F_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لكن:

$$[F_2 \circ F_1] = [F_2][F_1]$$

إذن المصفوفة الأساسية للتركيب $[F_2 \circ F_1]$:

$$[F_2 \circ F_2]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[F_2 \circ F_2]=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

طريقة ثانية:

$$[F_2 \circ F_2](x\,y)=F_2(F_1(x_1\,y)=F_2(-x,y)=(-x.o)$$

$$[F_2 \circ F_2](x\,y)=F_1(F_2(x,y)=F_1(x,y)=(-x.o)$$

أي أن المصفوفة الأساسية هي: $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$.

ملاحظة:

ليس من الضروري أن تكون $[F_2 \circ F_1]$ تساوي $[F_2 \circ F_1]$، [شكل (4.13)].

مثال (5):

خذ $F_1:R^2 \to R^2$ عملية انعكاس حول y= x و $F_2:R^2 \to R^2$ عملية اسقاطية متعامدة على المحور y، فإن:

$$[F_2 \circ F_2](x)=F_2(F_1(x,\ \ y)=F_2(y,x)=(o,x)$$

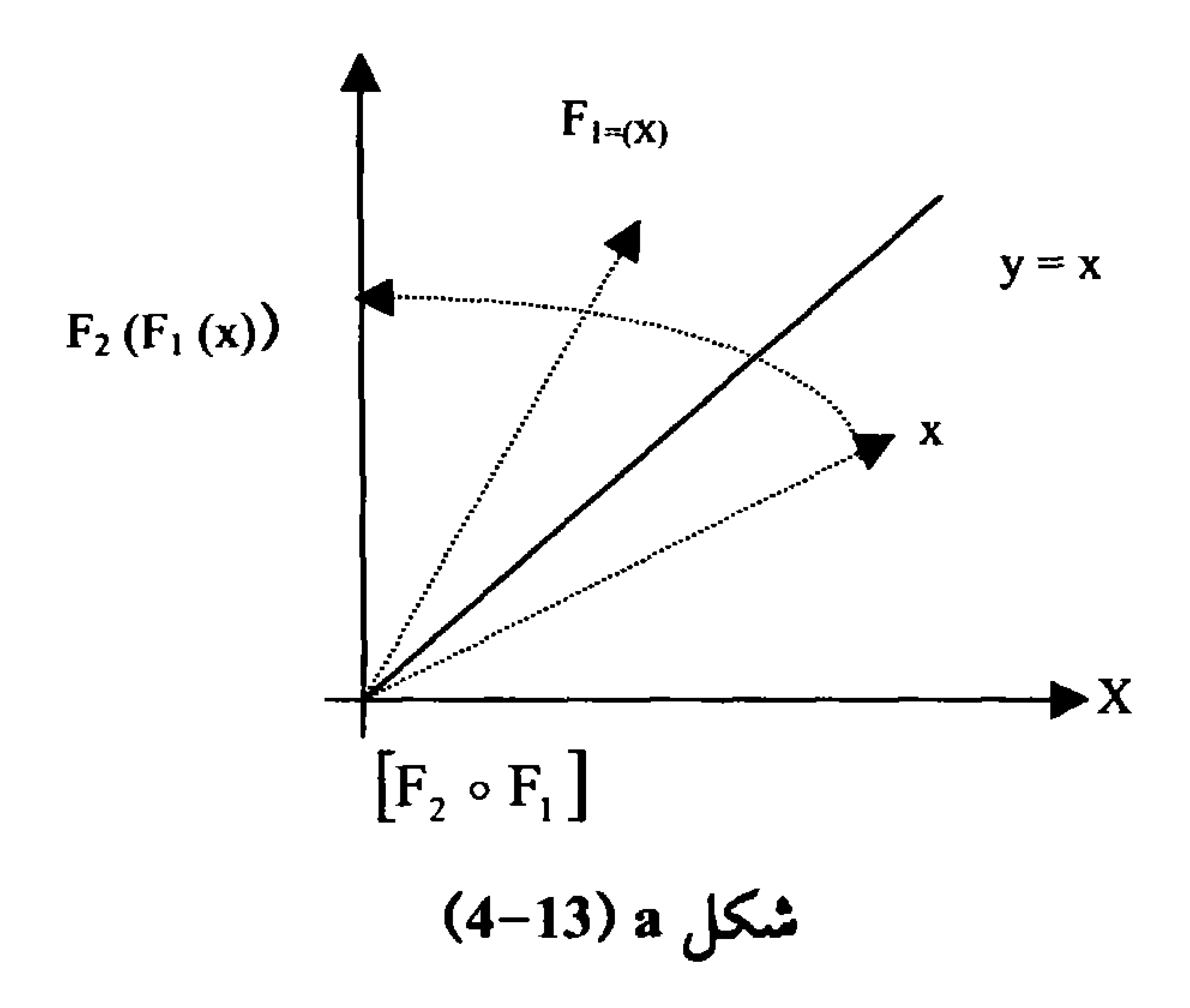
أو:

$$[F_2 \circ F_2]=[F_2][F_1]=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

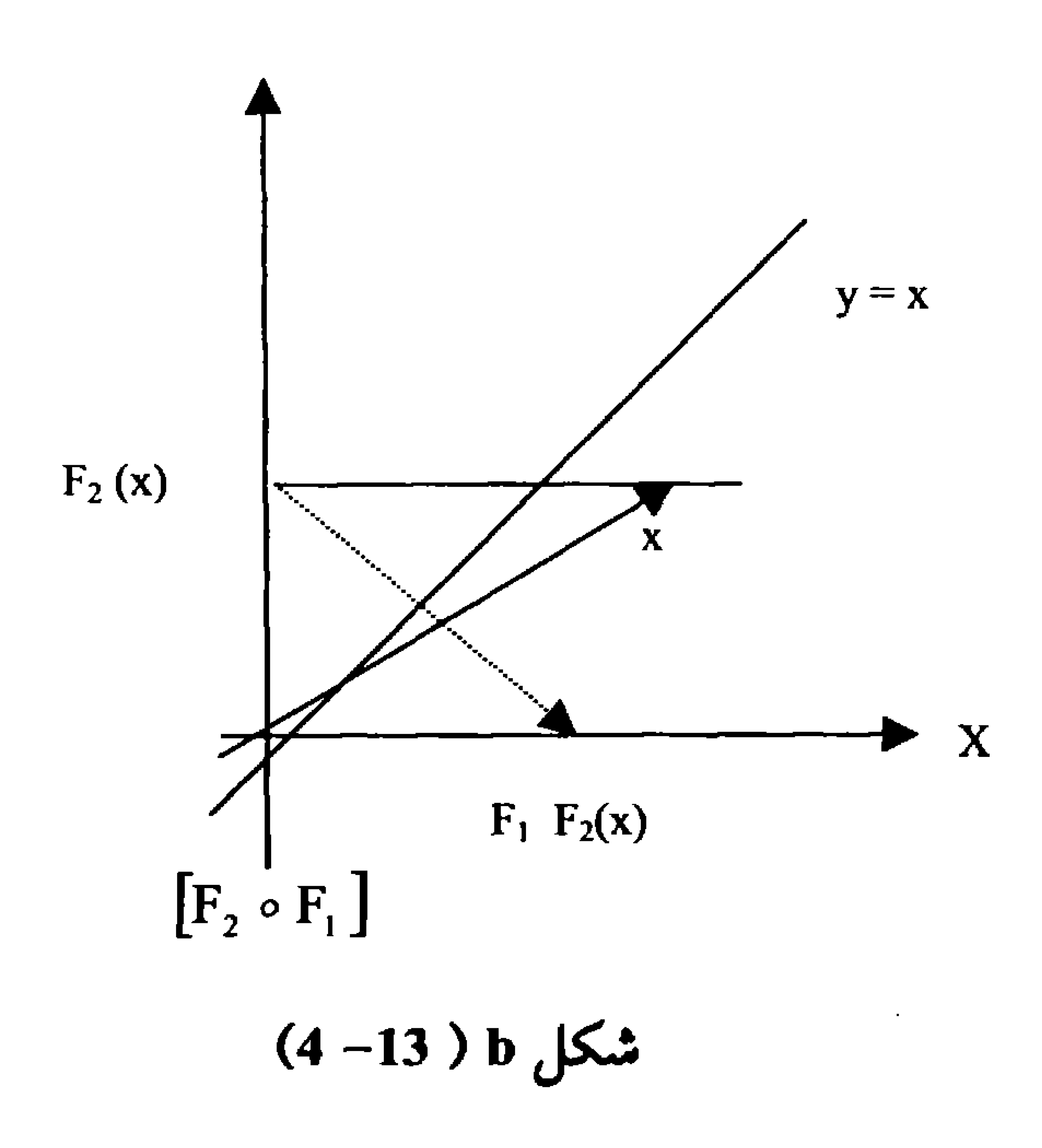
$$[F_2 \circ F_2]=[F_1][F_2]=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$[F_2 \circ F_1] \neq [F_1 \circ F_2]$$

عليه:



شكل a (4-13)



شكل b (4 -13)

تمارين بند (2-4)

1 - أوجد المصفوفة الأساسية للعملية الخطية F المعرفة:

$F(x,y)=(zx-y,x+y)$ (a

$F(x,y,z)=(x+2y+z.x+5y+z)$ (b

2 - أوجد المصفوفة الأساسية للتحريك الخطية المعرفة:

$F(x,y)=(z-x,y,x+3y,x-y)$ (a

$F(x,y,z,m)=(6x+2y-zm,x+5y,y+z,-x)$ (b

3. برهن فيما إذا كانت التحويلة F المعرفة بالمعادلات المؤشرة خطيـة أم لا ثـم أوجـد مجالها ومداها:

$w_1=5x-y+4z$ (a
$w_2=3x-7y+z$

$w_1=3x-y+z$ (b
$w_2=-x+y+5z$
$w_3=2x-4y+z$

4 - أوجد المصفوفة الأساسية للتحويلة الخطية $F:R^3 \to R^3$ المعطاة بالمعادلات:

$w_1=5x3y-7$
$w_2=4x-y+z$
$w_3=2x+3y-z$

أحسب F(1-, 4, 3) بطريقة ضرب المصفوفات والتعويض المباشر.

5 - أعطيت المصفوفة الأساسية [F] للتحويلة الخطية F أوجد F(x).

$[F]=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$. (a

b) $[F]=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $[F]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

6 – استخدم المصفوفة الأساسية للتحويلة F، ثم افحص النتيجة لحساب F(x).

$F(x,y,z)=(-x+y,y)$

7 – استخدم مضروب المصفوفة لإيجاد:

a) انعكاس (2,–1) حول المحور x والمحور $y=x$ المحور والمحور y.

b) المسقط العمودي للمتجه (–5، 2) على المحور x والمحورy.

8 – استخدم مضروب المصفوفة لإيجاد صورة (3,-4) إذا دار خلال الزاوية $\phi=30°$.

9 – افحص فيما إذا كانت $F_2 \circ F_1 = F_1 \circ F_2$، إذا:

a) $F_1:R^2 \to R^2$ = إسقاط عمودي على المحور x و $F_2:R^2 \to R^2$ إسقاط عمودي على y.

b) $F_1:R^2 \to R^2$: دوران خلال الزاوية ϕ و $F_2:R^2 \to R^3$ دوران خلال الزاوية ϕ (عكس عقارب الساعة)

10 – حقق العلاقة $[F_2 \circ F_1]=[F_1 \circ F_2]$ للتحويلات الخطية:

a) $F_1(x,y)=(x,2,x+4y)$ $F_2=(x,y)=(x,2x,+4y)$

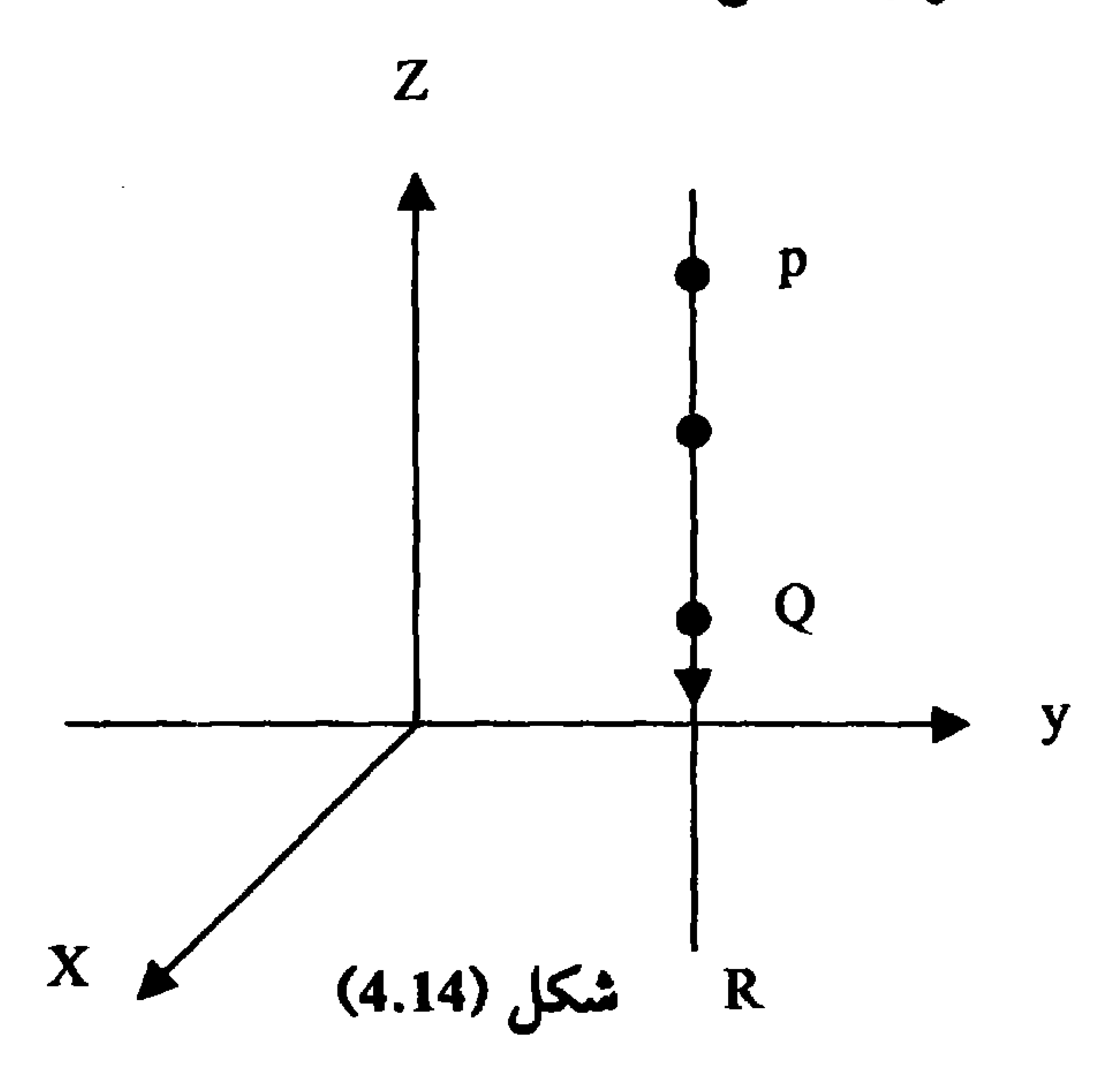
b) $F_1(x,y,z)=(-x+y \ -y+z,-z+x)$ و $F_2(x,y,z)=(-x,2z,-4y)$

4.3 خواص التحويلات الخطية من R^n إلى R^m

تناقش في هذا البند العلاقة بين قابلية الانعكاس للمصفوفة وخواص التحويلة المصفوفيه المقابلة. سوف نحصل على مميزات التحويلات من R^n إلى R^m. التي تشكل أساس التحويلات الخطية العامة، والتي سنناقشها في الفصول القادمة.

تعريف (4.3.1):

يقال للتحويلة الخطية $F:R^n \to R^m$ بأنها متباينة $(1-1)$ إذا كان كل عنصر في R^m هو صورة لعنصر واحد من R^n



شكل (4.14)

مثال (2): التدوير في بند (2-4) هو تحويلة خطية متباينة بينما العملية الاسقاطية العمودية في الشكل (4.14) فليست متباينة.

مبرهنة (4.3.2):

لتكن A مصفوفة سعتها $n\times n$ و $F_A:R^n \to R^n$ مضروبة A فإن الصيغ الآتية متكافئة:

1 – A قابلة للانعكاس.

2 – لكل متجه w في R^n يوجد متجه x في R^n حيث $F_A(x) = w$ ، بمعنى آخر، مدى F_A هو كل R^n .

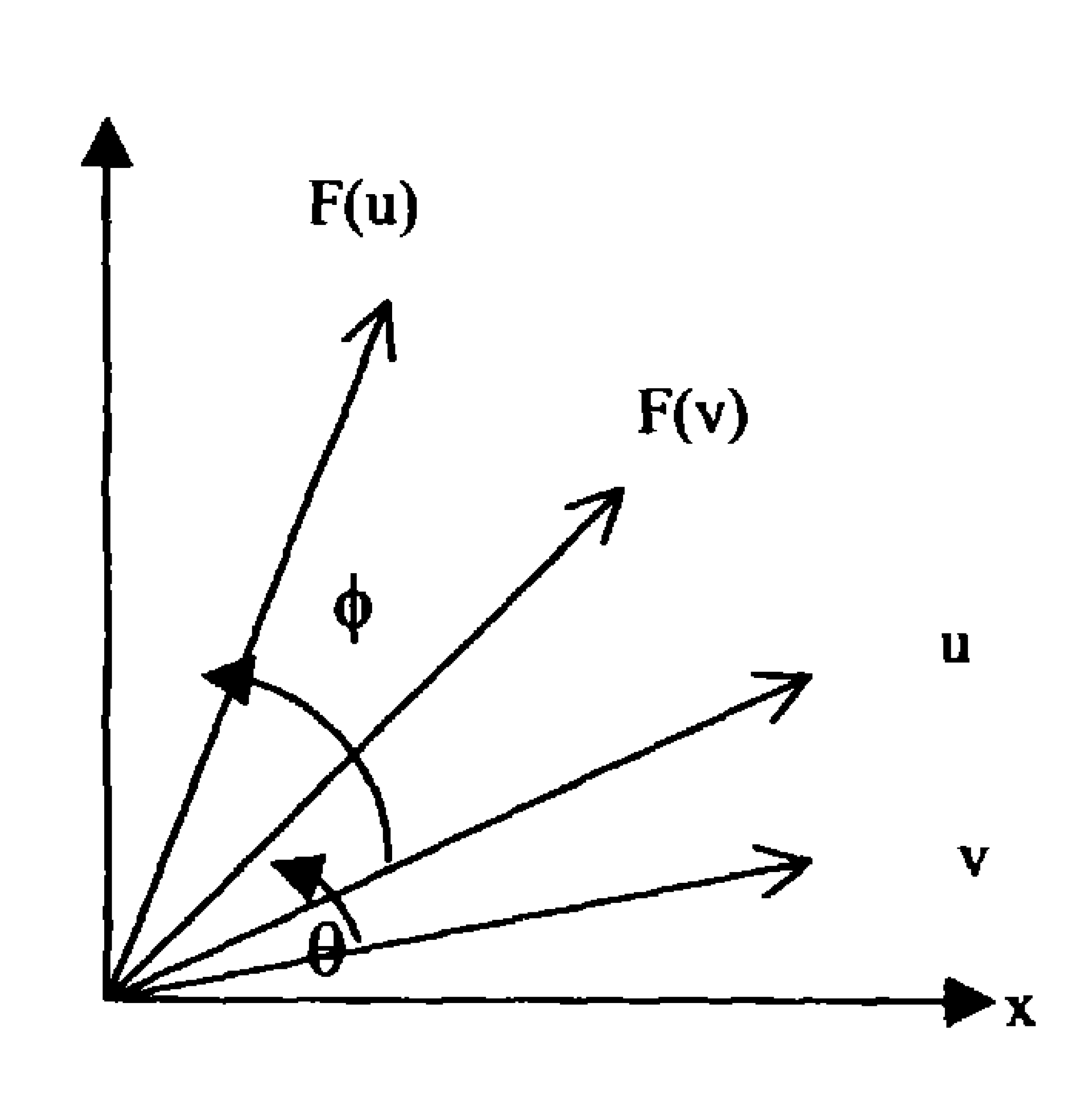
3 – لكل متجه w في مدى F_A، يوجد على الأكثر متجه واحد في R^n حيث $F_A(x) = w$، أي أن، F_A متباينة.

البرهان:

بموجب المبرهنة 2.3.2 (بند 2.3)، ومن خلال تحويرها لكي تناسب F_A المقابلة فإن الصيغ أعلاه متكافئة.

مثال (1):

التحويلة الخطية $F:R^2 \to R^2$ المبنية هندسيا في الشكل (4.15) هذه التحويلة هي تدوير متباين،لأنه إذا كانت U,V متجهات مبنية في R^2 ، فإن المتجهات المدورة $F(u), F(v)$ هما كذلك متجهات معنية. بواسطة المبرهنة (4.3.2) فإن مدى F يجب أن يكون كل R وأن المصفوفة الأساسية للتحويلة F يجب أن تكون قابلة للانعكاس.



الشكل (4-15)

ولكي نبرهن ذلك يجب أن نبرهن أن كل w في R هو صورة لمتجه ما مثل x بواسطة f ، هذا واضح لأن المتجه x الذي حصلنا عليه بواسطة تدوير w خلال الزاوية θ تكون صورته w

من الجدول (4.8) بند (4.2) المصفوفة الأساسية للتحويلة F.

$$[F]=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

قابلة للانعكاس لأن:

$$\det[F]=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\neq 0$$

معكوس العملية الخطية المتباينة:

لتكن $F_A:R^n\rightarrow R^n$ عملية خطية متباينة، عليه بموجب مبرهنة (4.3.2)، A قابلة للانعكاس. لذا $F_{A^{-1}}:R^n\rightarrow R^n$ هي نفسها عملية خطية، تسمى معكوس F_A العمليات F_A و F_{A-1} أحدهما تزيل تأثير الأخرى، أي:

$$FA\,(F_{A^{-1}})=AA^{-1}x=1x=x$$

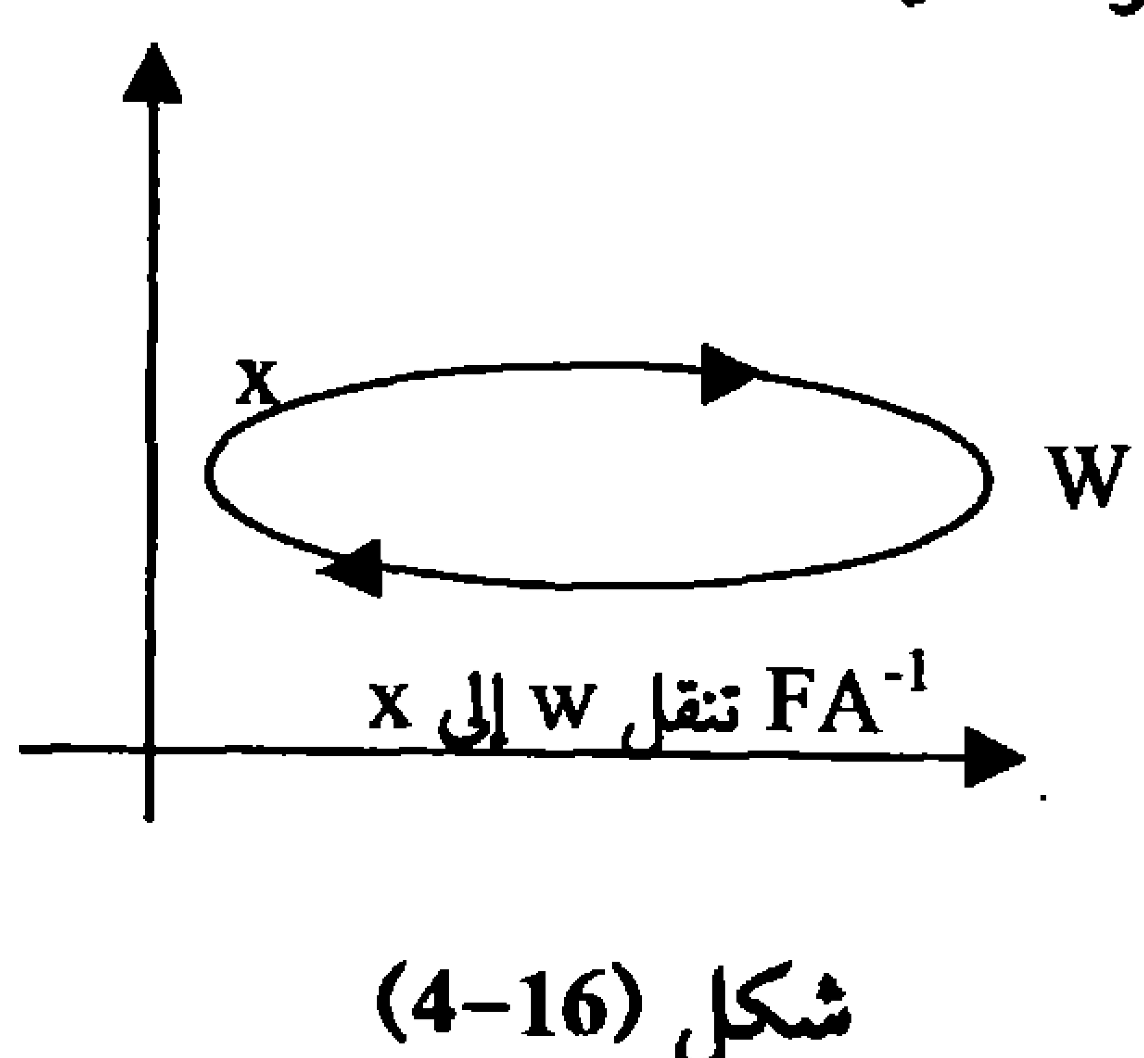
لكل $x\in R^n$

$$FA^{-1}(FA(X))=A^{-1}Ax=x$$

بمعنى آخر (شكل 16 – 4):

$$F_A\ o\ FA^{-1}=FAA^{-1}=FI$$
$$F_{A-1}\ o\ FA=FA^{-1}A=FI$$

حيث أن I هي مصفوفة محايدة:



شكل (4-16)

من وجهة النظر الهندسية، إذا كانت W صورة X تحت تأثير F_A، فإن F_{A-1} تعيد الصورة إلى W إلى X لأن:

$$F_{A-1}(W) = F_{A-1} F_A (x) = x$$

ملاحظة:

من المفيد عندما نكتب العملية المتباينة $F{:}R^n \to R^n$ بدلا عن $F_A{:}R^n \to R^n$، أن نكتب معكوس F بالشكل F^{-1} بدلا عن F_{A-1}،

بما أن المصفوفة الأساسية للتحويلة F^{-1} هي معكوس المصفوفة الأساسية للتحويلة F فإن:

$$[F^{-1}]=[F]^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

مثال (2):

نفرض $F{:}R^n \to R^n$ عملية تدوير كل متجه في R^2 خلال زاوية مثل θ، لذا من الشكل (4-9).

$$[F]=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من الواضح هندسيا، إنه لابطال تأثير F ، فإننا نحتاج فقط لتدوير أي متجه R^2 خلال الزاوية θ- وهذا بالضبط هو ما تفعله F^{-1} ، لأن مصفوفة F^{-1} الأساسية هي:

$$[F^{-1}]=[F]^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

وهي نفسها المصفوفة في (2) عدا استبدال θ بـ θ-

مثال (3):

لتكن $F{:}R^2 \to R^2$ عملية معرفة:

$$W_1 = 2x + y$$
$$W2 = -3x + 3y$$

برهن أن F متباينة وأجد $F^{-1}(w_1, w_2)$

الحل:

الصيغة المصفوفية للمعادلات هي:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

أي أن $\left[F = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right]$

لذا فالمصفوفة الأساسية قابلة للانعكاس، أي أن F متباينة وأن المصفوفة F^{-1} هي:

$$[F^{-1}] = [F^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

عليه:

$$F^{-1} = (w_1, w_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$F^{-1}(w_1, w_2) = (\frac{1}{3} w_1 + \frac{1}{3} w_2 \ , \frac{1}{9} w_1 + \frac{2}{9} w_2)$$

لاحظنا في البند السابق أن التحويلة $F: R^n \to R^m$ خطية إذا كانت المعادلات التي تربط x و$w = F(x)$ خطية. المبرهنة الآتية تعطينا تعريفا للخطية بصورة عامة.

مبرهنة (4-3-3):

التحويلة $T: R^n \to R^m$ خطية إذا وفقط تحققت الشروط الآتية:

1. $T(v+u) = T(v) + T(u)$، لكل u, v في R^n
2. $T(kv) = kT(v)$ لكل $v \in R^n$ و k كمية ثابتة.

البرهان:

نفرض T تحويلة خطية وA مصفوفتها الأساسية.

عليه:

$$T(v+u) = A\,(v+u) = Av + Au = T\,(v) + T\,(u)$$

$$T\,(kv) = A\,(Kv) = k\,T\,(v)$$

نفرض العكس ونبرهن T خطية من خلال مصفوفة مثل A حيث:

$$T(x) = A\,x \text{ لكل } x \in R^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعمم الشرط الأول إلى n من المتجهات، أي إذا $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n \in R^n$ فإن:

$T\,(v_1+v_2+\ldots\ldots+v_n) = T\,(v_1) + T\,(v_2) + \ldots\ldots + T\,(v_n)$ (استخدام الاستقراء الرياضي).

نفرض:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots\ldots\ldots, en = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$A = \left[T(e_1)\ \vdots\ T(e_2)\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ T(en)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

فإذا كان $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$، أي متجه في Rn ، فإن Ax هو تركيب خطي لمتجهات أعمدة A التي معاملاتها من X .

لذا:

$$Ax = x_1\, T(e_1) + x_2\, T(e_2) + \ldots\ldots\ldots + x_n\, T(x_n)$$
$$= T(x_1, e_1) + T(x_2 e_2) + \ldots\ldots\ldots + T(x_n e_n)$$
$$= T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n e_n)$$
$$= T(x)$$

لأهمية العلاقة (5) سنضيفها بشكل مبرهنة:

مبرهنة (4-3-4):

إذا كانت $T: R^n \to R^m$ تحويلة خطية و e_1 ,......e_2 ,..... ,e_n متجهات الأساس الطبيعي في R^n، فإن مصفوفة T الأساسية هي:

$$[T] = [T(e_1)] \vdots T(e_2) \vdots \cdots \vdots T(en) \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

مثال (4):

إذا كانت $T_A: R^3 \to R^2$ مضروبة A حيث $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ فإن متجهات الأساس الطبيعي يمكن إيجادها من أعمدة A:

$$T_A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ T_A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

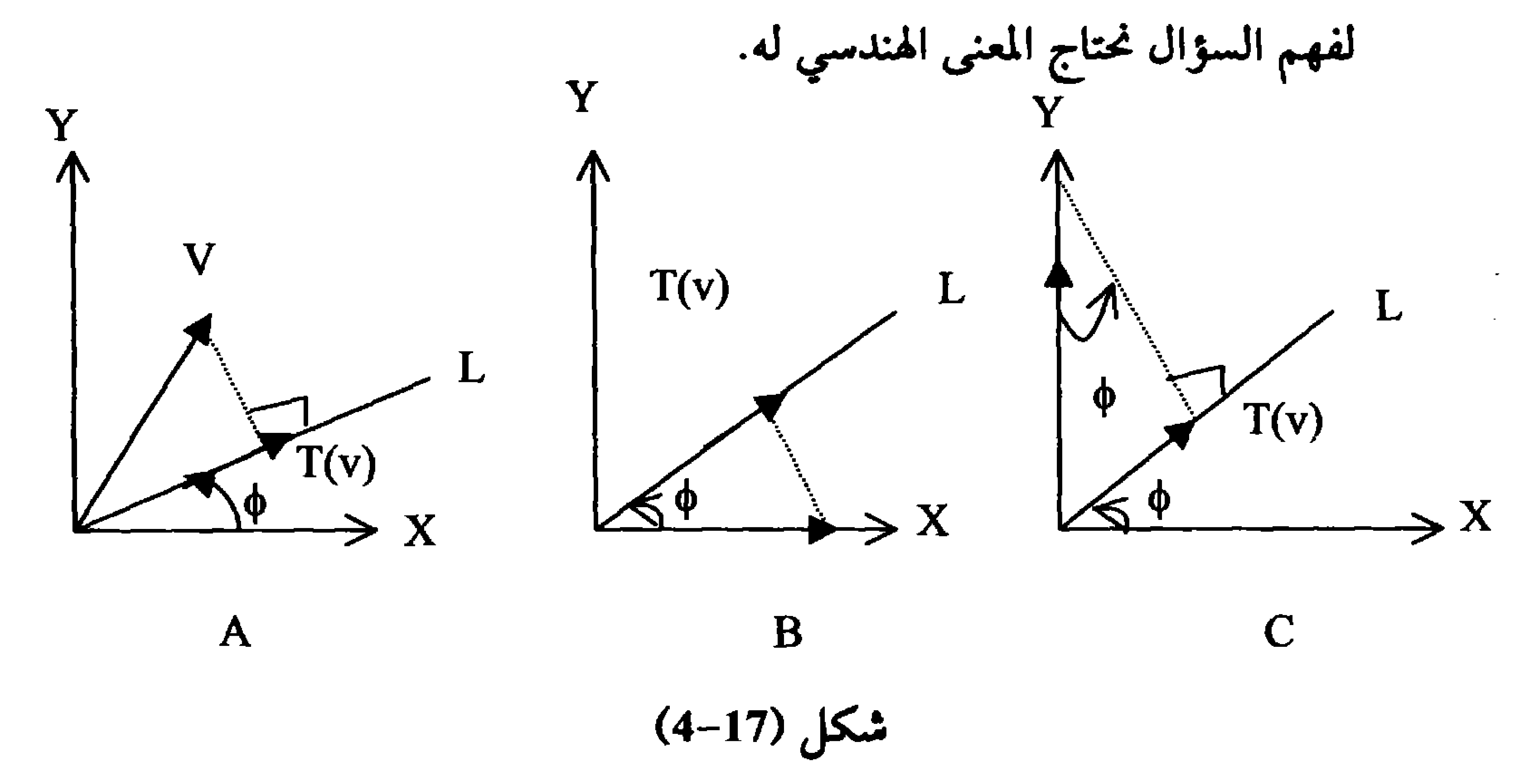
مثال (5):

ليكن L مستقيم مرسوم في المستوى xy ويمر بنقطة الأصل ويصنع زاوية مثل ϕ مع المحور x الموجب حيث $o \le \phi < \pi$. نفرض أن $T \leftarrow: R^{\wedge} \to R^{\wedge}$ عملية خطية والتي تنقل كل متجه إلى مسقطه العمودي على L، لاحظ الشكل (4-17) أوجد:

1. المصفوفة الاساسية للعلمية T.
2. المسقط العمودي للمتجه $V = (1.5)$ علـى المستقيم المار بنقطة البداية ويصنع الزاوية $\phi = \pi/6$ مع المحور الموجب x.

البرهان:

لفهم السؤال نحتاج المعنى الهندسي له.



شكل (4-17)

من العلاقة (6) لدينا:

$$[T]=[T(e_1):T(e_2)]$$

حيث e_2,e_1 متجهات الأساس الطبيعي لـ R^2.

نفرض الحالة عندما $O\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ (بنفس الطريقة عندما $\left(\frac{\pi}{2}<\phi\le\pi\right)$)

من الشكل (4.17) نحصل على:

$$\|T(e_1)\|=\cos\phi$$

لذا:

$$T(e_1)=\begin{bmatrix}\|T(e_1)\| & \cos^2\phi\\ \|T(e_2)\| & \sin\ \phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\phi\\ \sin\ \phi\cos\ \phi\end{bmatrix}$$

عليه فمصفوفة T الأساسية هي:

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos^2\phi & \sin\phi\cos\phi\\ \sin\phi\cos\phi & \sin^2\phi\end{bmatrix}$$

(2) نفرض $\phi=\pi/6$

بما أن $\sin \pi/6 = \frac{1}{2}$ و $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن مصفوفة العملية الاسقاطية هي:

$$[T]=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

إذن:

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad =\begin{bmatrix} \frac{3+5\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}+5}{4} \end{bmatrix}$$

أو:

$$T(1,5)=\left[\frac{3+5\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}+5}{4}\right]$$

ملاحظة:

من مبرهنة (2، 3،2) ومبرهنـــة (2، 3،4) نحصـل ولغايـة الآن علـى الخـواص المتكافئة الآتية:

1. A قابلة للانعكاس.
2. النظام المتجانس AX=0 له حل وحيد وهو الحل الصفري.
3. الشكل المدرج الصفي المختزل للمصفوفة A هو I
4. يمكن التعبير عن A كحاصل ضرب مصفوفة بسيطة.
5. النظام Ax=B متسق لكل B التي سعتها nx1.
6. النظام Ax=B له حل واحد فقط لكل B ذات السعة nx1.
7. محدد A لا يساوي صفر.
8. TA متباينة.
9. مدى TA هو R^n.

تمارين (3- 4)

1 - هل أن العمليات الخطية الآتية متباينة.

- الإسقاط العمودي على المحور x في R^n
- الانعكاس حول المحور y= x في R^n
- الدوران حول المحور Z في R^3

2 - استخدم تعريف التحويلة الخطية لمعرفة فيما إذا كانت T المعرفة بالتالي، تحويلة خطية أم لا.

- $T(X, Y) = (2x, y)$
- $T(x, y) = (x + 1, y)$
- $T(x, y, z) = (2x - y, 3x - 2z)$
- $T(x, y) = (z, z)$

3 - استخدم مبرهنة (4.3.5) لإيجاد المصفوفات الاساسية للعمليات الخطية التالية بإيجاد صور متجهات الأساس الطبيعية.

- عمليات الانعكاس على R^2 الواردة في الشكل (4-4).
- عمليات التدوير في R^2 الواردة في الشكل (4-8).
- العمليات الاسقاطية في R^2 الواردة في الشكل (4-6).

4 - بين أن مدى العملية الخطية المعرفة ادناه ليس كل R^2 أوجد المتجه في الموجود في المدى.

$$w_1 = 4x - 2y$$
$$w_2 = 2x - y$$

5 - هل أن العمليات الخطية $T: R^2 \rightarrow R^2$ المعرفة بالمعادلات أدناه متباينة إذا كانت كذلك أوجد المصفوفة الأساسية لمعكوسها، ثم أوجد T^{-1} $(w_1, w_2, w_3,)$.

a) $w_1 = x - 2y + 2z$
$w_2 = 2x + y + z$
$w_3 = x + y$

b) $w_1 = x - 3y + 4z$
$w_2 = -x + y + z$
$w_3 = -2y + 5z$

6 - أوجد معكوس العمليات الخطية المتباينة الآتية:

a) الانعكاس حول المحور y في R^2

b) الدوران خلال الزاوية $\frac{\pi}{4}$ في R^2.

c) الانكماش بواسطة العامل $\frac{1}{3}$ في R^3

تمارين محلولة

1. لتكن $T:R^2 \to R^2$ معرفة بالشكل:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{bmatrix}$$

برهن أن T تحويلة خطية.

الحل: نبرهن الشرط الأول من مبرهنة (4,3,4).

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x_1 & + & x_2 \\ y_1 & + & y_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + & x_2 + & y_1 + & y_2 \\ x_1 + & x_2 - & y_1 - & y_2 \\ 3x_1 & +3y_2 & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \\ 3y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ 3y_2 \end{bmatrix}$$

$$= T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

تمرين: اكتب أسباب كل خطوة

والآن نبرهن الشرط الثاني من مبرهنة (4، 3، 4).

$$T\left(\propto\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix}\propto & x\\\propto & y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\propto x+\propto y\\\propto x-\propto y\\3\propto y\end{bmatrix}$$

$$=\propto\begin{bmatrix}x+y\\x-y\\3y\end{bmatrix}=$$

$$=\propto T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

2. لتكن T تحويلة خطية معرفة $T:R^3\to R^2$ بحيث:

T (1,0,0) = (2,3)

T (0,1,0) = (-1,4)

T (0,0,1) = (5,-3)

أوجد T (3, -4,5)؟

الحل:

لدينا من الفصول السابقة:

(3, -4, 5) = 3(1,0,0) –4 (0,1,0) + 5 (0,0,1)

عليه

T (3, -4, 5) = 3 T (1,0,0) – 4 T (0,1,0) + 5T (0,0,1)

ثم نفوض:

= 3 (2,3) – 4 (-1,4) + 5 (5,-3)

= (6, 9) + (4, -16) + (25 , 25)

= (35, -22)

3. نفرض T_1, T_2 تحويليتان خطيتان معرفتان:

$T_1 : R^2 \to R^2$: معرفة بالشكل: $T_1(x_1, x_2)=(x_2, x_1)$

$T_2 : R^2 \to R^2$: معرفة بالشكل: $T_2(x_1, x_2)=(2x_1, 2x_2)$

فإن ضربهما يعرف:

$$T_1 \circ T_2 (x_1, x_2)=T_1 (T_2 (x_1, x_2)) = T_1 (2x_1, 2x_2)=(2x_2, 2x_1)$$
$$T_1 \circ T_2 (x_1, x_2)=T_2 (T_1 (x_1, x_2)) = T_2 (x_2, x_1)=(2x_2, 2x_2)$$

لاحظ أن: $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ (ليس ضروريا أن تكون متساوية دائما)

4. إذا كانت T_2, T_1 تحويلات خطية بحيث $T_1 : R^2 \to R^2$ و $T_2 : R^2 \to R^2$ والمعرفتان:

$$T_1 (x_1, x_2)=(x_1 + 2x_2, -x_2)$$
$$T(x_1, x_2)=(-x_1, 4_{x1} + x_2)$$

فإن:

$$T_1 \circ T_2 (x_1, x_2)=T_1 (T_2 (x_1, x_2)) = T(-x_1, 4x_1 + x_2)$$
$$= (7x_1 + 2x_2 - 4x_1 - x_2)$$
$$T_2 \circ T_1 (x_1, x_2)=T_2 (x_1 + 2x_2, -x_1)$$
$$= (7x_1 - 2x_2, -4x_1 - 7x_2)$$

لذا فإن $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$

5. إذا كانت $T : R^3 \to R^4$ تحويلة خطية المعرفة بالصيغة.

أوجد مصفوفة T.

الحل:

بما أن:

$$T(1,0, 0) = (1, 0, 2, -1, 2)$$

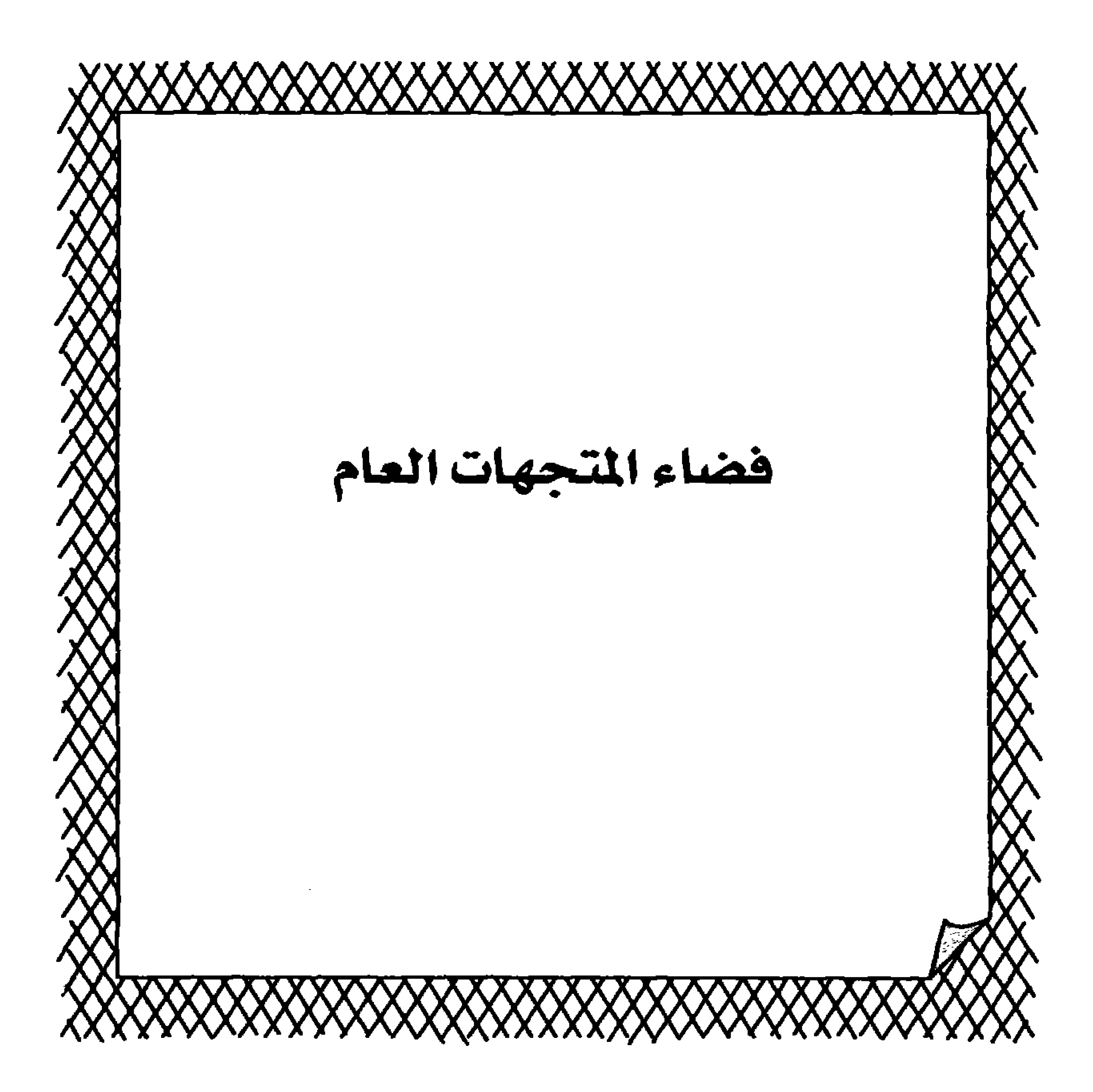
فإن مصفوفة T الأساسية هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

التحقيق:

$$(x,y,z)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-y \\ y+z \\ 2x-y-z \\ -x+y+z \end{bmatrix}$$

الفصل الخامس



فضاء المتجهات العام

الفصل الخامس

فضاء المتجهات العام

5-1 فضاء المتجهات الحقيقي:

درسنا في الفصل السابق فضاء المتجهات الإقليدي. سنحاول في هذا الفصل تسليط الضوء على فضاءات أخرى إضافة للفضاء الإقليدي مثل المصفوفات ومتعددات الحدود وغيرها.

تعريف (1-1-5):

تسمى المجموعة غير الخالية V مع عمليتين ثنائيتين معرفتين عليها هما الجمع والضرب بعدد ثابت، فضاء متجهات على الأعداد الحقيقية، إذا تحققت الشروط الآتية:

A_1: لكل $v, u \in V$ فإن $v + u \in v$.

A_2: لكل $v, u, \in V$، فإن $v + u = u + v$

A_3: لكل $v, u, w \in V$ $(v + u) + w = v + (u + w)$.

A_4: يوجد $0 \in V$ يسمى المتجه الصفري بحيث أن $v + 0 = 0 + v = v$ لكل $v \in V$.

A_5: $v \in V$ يوجد عنصر $-v \in V$، يسمى سالب v بحيث $v + (-v) = (-v) + v = 0$

m_1: لكل $v \in V$ و k كمية ثابتة فإن $kv \in V$.

m_2: $k(v + u) = kv + ku$ لكل k كمية ثابتة و $v, u \in V$.

m_3: $(k + l)v = kv + lv$ لكل l و k كميات ثابتة و $v \in V$.

m_4: $(km)v = k(mv)$ لكل l و k كميات ثابتة و $v \in V$.

m_5: $1.v = v$ لكل $v \in V$.

ملاحظة:

1. عملية الجمع يرمز لها + والضرب بعدد ثابت يعني ضرب v بالعدد k (أي kv).
2. تسمى عناصر V متجهات.
3. الرمز A_i استخدم هنا لشروط الجمع، أما m_i فقد استخدمت للضرب (لسهولة حفظها).

مثال (1):

المجموعة $V = R^n$ مع عمليتي الجمع والضرب بعدد ثابت والمعرفة في (4.1) تحقق الشروط أعلاه. عليه فهي فضاء متجهات.

مثال (2):

لتكن $V = \{0\}$، أي أن V تحوي على عنصر واحد هو 0، فإن V تحقق شروط (5-1-1) جميعها فهي إذن فضاء متجهات.

مثال (3):

لتكن $V = \{(a, b) : b = ka\}$ حيث k عدد حقيقي ثابت و a عدد حقيقي. عليه فإن V تحتوي على جميع النقاط الواقعة على الخط المستقيم $b = ka$ المار بنقطة الأصل والذي ميله k ولما كان $ka_1 + ka_2 = k(a_1+a_2) \in V$

و $-k(a) = k(-a) \in V$ كذلك $ka + k(-a) = 0$ فإن الشرطان A_1 و A_5 متحققان.

بما أن بقية الشروط يمكن إثباتها بسهولة. لذا فإن V فضاء متجهات.

مثال (4):

نفرض $V = \{y: y = 2x + 1\}$ حيث x عدد حقيقي. لاحظ أن V مجموعة جميع النقاط الواقعة على الخط المستقيم $y = 2x + 1$. V لا تكون فضاء متجهات لأن شرط الانغلاق الجمعي لا يتحقق وذلك لأن:

$$y_1 + y_2 = (2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) = 2(x_1 + x_2) + 2 \notin V$$

مثال (5):

لتكن $V = P_n(x)$ مجموعة جميع متعددات الحدود من الدرجة أصغر أو تساوي n. أي:

$$V = \{ (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0) \}$$

حيث a_i أعداد حقيقية. فإن V فضاء متجهات لأن:

إذا $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^n + ... + a_0$, $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_0$ حيث $p(x), q(x) \in P_n(x)$. فإن:

$$P(x) + q(x) = (a_n + b_n) x^n + ... + (a_0 + b_0)$$

عليه فإن شرط الانغلاق متحقق

نعرف متعددة الحدود الصفرية $0 + ... + 0 = 0x^n + 0x^{n-1}$ لذا $0 \in P_n$

إذا كانت $-P(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} ... ao$ فإن $-P(x) \in P_n(x)$ وهكذا الشرط A_s متحقق. بالاستمرار على نفس الطريقة يمكننا برهان الشروط الأخرى.

إذن $V = P_n(x)$ فضاء متجهات.

مثال (6):

إذا كانت $V = \{(x, y) : y \geq 0\}$. V فإن مجموعة جميع النقاط في R^2 التي تكون الربعين الأول والثانيK ليست فضاء متجهات لأن على سبيل المثال، النقطة (1, 1) ليست لها معكوس في V $[(-1, -1) \notin V]$.

مبرهنة (5-1-2):

لتكن V فضاء متجهات، $v \in V$ و k كمية ثابتة، فإن:

1. $0v = 0$.
2. $k0 = 0$.
3. $(-1) v = -v$
4. إذا $kv = 0$ فإن $k = 0$ أو $v = 0$.

البرهان:

نبرهن (2) و (3) ونترك الباقي كتمارين.

2. بما أن $0 + 0 = 0$ [A_4 مبرهنة (5-1-1)]

إذن $k(0 + 0) = k0 + ko = k0$ [m_3 مبرهنة (5-1-1)]

بإضافة $-k0$ للطرفين:

إذن: $(k0 + k0) - k0 = k\,0 + (-k0)$

$k0 + (k0 - k0) = 0$

$k0 + 0 = 0$

عليه : $k0 = 0$

3. لدينا $1 + (-1) = 0$

$0 = [1 + (-1)]\,v = 1v + (-1)v = v + (-1)\,v$

بإضافة $-v$ للطرفين:

$0 + (-v) = v + (-v) + (-v) = v + (-v) + (-1)v$

$= 0 + (-1)\,v = (-1)\,v$

عليه : $-v = (-1)\,v$

تمارين (5-1)

1. أي من المجموعات الاتية تمثل فضاء متجهات وأيهما لا تمثل، مع بيان السبب.

a. مجموعة جميع المصفوفات القطرية سعة $n \times n$ تحت عمليتي جمع وضرب المصفوفات بكمية ثابتة.

b. المتجهات الواقعة في مستوى الربع الأول.

c. مجموعة المتجهات في R^3 التي شكلها (x, x, x).

d. مجموعة جميع الأزواج من الأعداد الحقيقية من الشكل (x, o) مع العمليات الاعتيادية في R^2.

5-2 الفضاءات الجزئية:

تعريف (5-2-1):

تسمى المجموعة الجزئية W من الفضاء V، فضاء جزئي في V إذا كانت W نفسها فضاء متجهات تحت عمليتي الجمع والضرب في V.

ملاحظة:

يتضح من التعريف (5-2-1) أنه لكي نبرهن W فضاء جزئي من V علينا أن نبرهن أن W تحقق الشروط العشرة الواردة في التعريف (5-1-1). لكن عدداً من تلك الشروط لا حاجة لتحقيقها هنا لأن W هي جزء من V، هذه الشروط هي m_5, m_4, m_3, m_2, A_3. لذا سنحتاج فقط برهان الشروط A_1, A_4, A_5, m_1.

مبرهنة (5-2-2):

المجموعة الجزئية غير الخالية W من V تكوّن فضاء جزئي من V إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

1. لكل $v, u \in W$ فإن $v + u \in W$.

2. إذا k عدد ثابت و $v \in W$ فإن $kv \in W$.

البرهان:

نبرهن الاتجاه الأول.

نفرض W فضاء جزئي، إذن W فضاء متجهات ولهذا فإنها تحقق شروط التعريف (5-1-1)، ومنها الشرطان 1 و 2.

وبالعكس نفرض الشرطان متحققان.

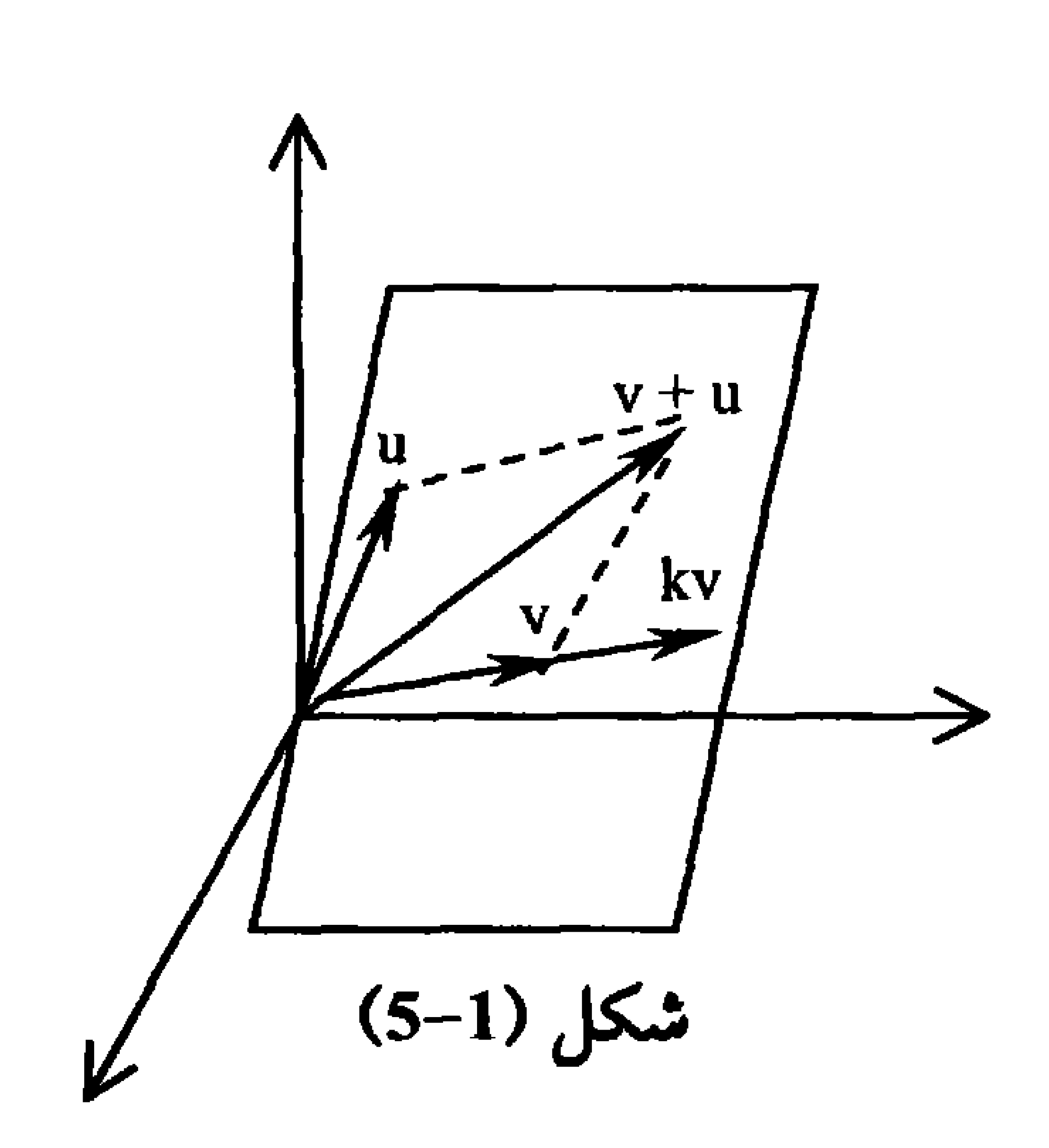
لما كانت الشروط A_2 و A_3 و m_2 و m_3 و m_4 و m_5 متحققة تلقائياً لأن W مجموعة جزئية من V.

بقي لدينا أن نبرهن الشروط A_4 و A_5.

نفرض $v \in W$، بموجب الشرط الثاني أعلاه فإن $kv \in W$ لكل ثابت k. بفرض $k = 0$ فإن $0v = 0$ (مبرهنة (5-1-2)) في W وعند فرض $k = -1$ نحصل على $(-1)v = -v$ في W.

مثال (1):

لتكن W هي مستوى مار بنقطة الأصل [الشكل (5-1)] و u, v متجهات في W. لذا $v + u \in W$ وأن $v + u$ قطر متوازي الأضلاع، كذلك kv يقع في W ولأي k لأن kv متجه يقع على امتداد الخط المار بالمتجه v. لذا فإن شروط المبرهنة (5-2-2) متحققة. عليه فإن W فضاء جزئي.



شكل (5-1)

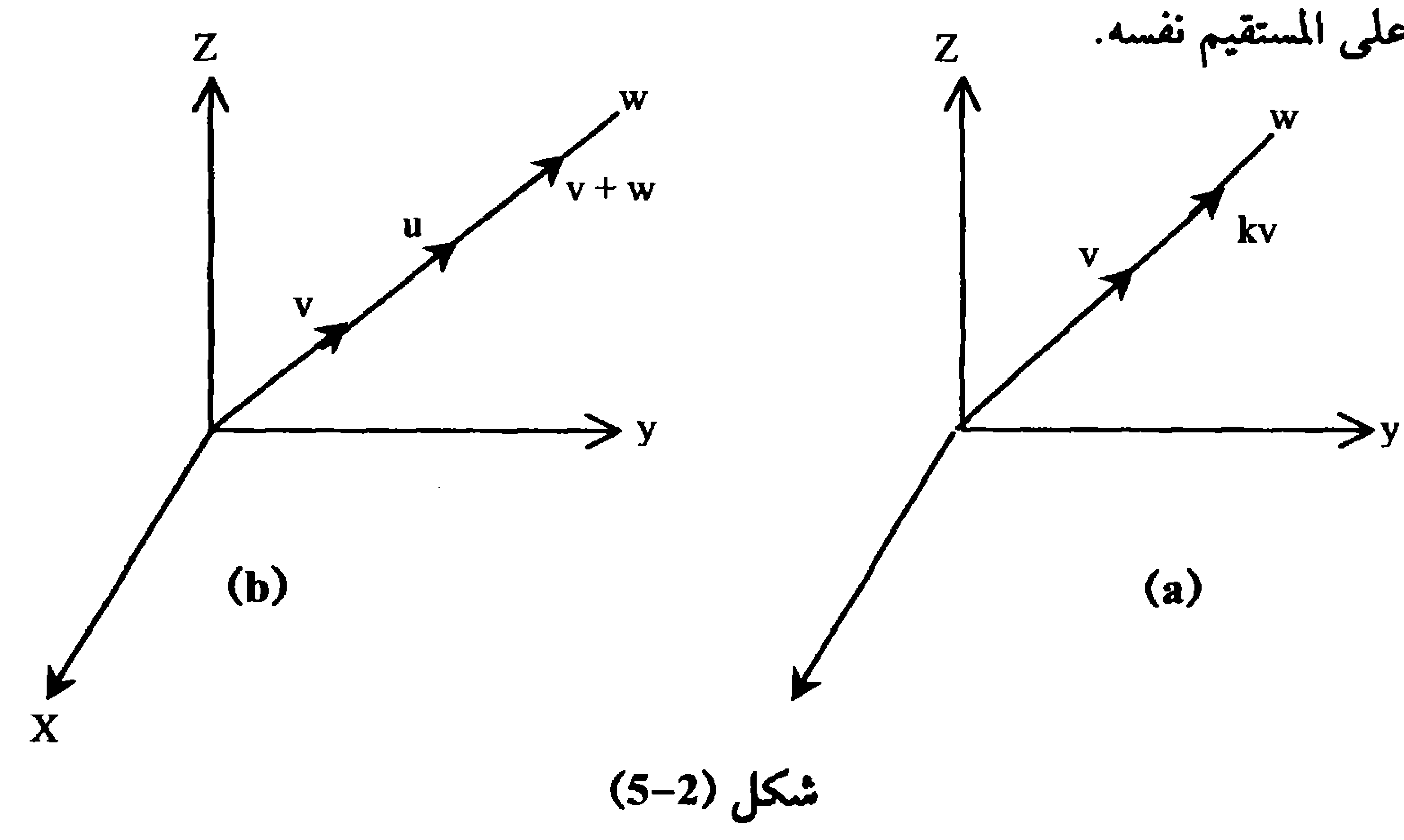
مثال (2):

إذا كانت V فضاء متجهات فإن المجموعة {0} و V نفسها فضاءات جزئية من V، (لأن $0 + 0 = 0$ و $k0 = 0$ لكل عدد ثابت k).

الفضاءات الجزئية {0} و V تسمى الفضاءات الجزئية الواضحة. الفضاءات الجزئية في V عدا الواضحة تسمى الفضاءات الجزئية الفعلية.

مثال (3):

نفرض W هو المستقيم المار بنقطة الأصل في R^3، فإن W هو فضاء جزئي. واضح هندسياً [الشكل (2-5)] أن مجموع متجهين واقعين على هذا المستقيم يقع على المستقيم نفسه، كذلك ضرب أي متجه واقع على هذا المستقيم بعدد ثابت يقع على المستقيم نفسه.



شكل (2-5)

مثال (4):

لتكن P_n مجموعة جمع متعددات الحدود التي درجتها أصغر أو تساوي n. إذا كان $0 < m < n$ فإن المجموعة الجزئية P_m فضاء جزئي فعلي في P_n (تحقق من ذلك).

مثال (5):

إذا كان U و W فضاءات جزئية في الفضاء V فإن تقاطعهما $W \cap U$ فضاء جزئي في V.

واضح أن $0 \in U \cap W$ لأن 0 ينتمي لكل منهما. نفرض أن $v, u \in U \cap W$

لذا فإن $v, u \in U$ و$v, u \in W$، عليه فإن $v + u \in U$ و $v + u \in W$

إذن $v + u \in U \cap W$، كذلك $kv \in U \cap W$، حيث k عدد حقيقي (لأن U وW فضاءات).

مثال (6):

لتكن W مجموعة جميع النقاط (x, y) في R^2 بحيث أن $x, y \geq 0$ إذن هذه النقاط تقع في الربع الأول، لهذا فإن W ليست فضاء جزئي تقع في W لكن $(-1)v = (-1, -1)$ لا تقع في W.

تعريف (3-2-5):

ليكن V فضاء متجهات و $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ متجهات في V يقال للمتجه v في V بأنه <u>تركيب خطي</u> من المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ إذا أمكن كتابة v بالشكل:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$$

حيث $c_1, c_2, ..., c_n$ كميات ثابتة.

مثال (7):

نفرض $v_1 = (1, 2, -1)$ و $v_2 = (1, 0, -1)$ متجهات في R^3، فإن $v = (1, 0, 2)$ تركيب خطي من المتجهات v_1 و v_2.

لكي نبرهن تركيب خطي يجب أن نجد c_1 و c_2 بحيث $v = c_1v_1 + c_2v_2$ أي أن:

$$(1, 0, 2) = c_1 (1, 2, -1) + c_2 (1, 0, -1)$$

عليه:

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$2c_1 = 0$$

$$-c_1 - c_2 = 0$$

ولكن هذه المعادلات ليست لها حل، عليه فإن v ليست تركيب خطي من v_1 و v_2.

مثال (8):

إذا كانت $v_1 = (1, 2, 1, -1)$، $v_2 = (1, 0, 2, -3)$، $v_3 = (1, 1, 0, -2)$ متجهات في R^3 فإن $v = (2, 1, 5, -1)$ هو تركيب خطي من v_1 و v_2 و v_3

الحل:

نفرض:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$$

بالتعويض:

$$(2, 1, 5, -1) = c_1 (1, 2, 1, -1) + c_2 (1, 0, 2, -3) + c_3 (1, 1, 0, -2)$$

وبالمقارنة والتساوي نحصل:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 2$$

$$2c_1 \quad + c_3 = 1$$

$$c_1 + 2c_2 \quad = 5$$

$$-c_1 - 3c_2 - 2c_3 = -1$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على:

$$c_3 = -1 \ , \ c_2 = 2 \ , \ c_1 = -1$$

أي أن:

$$v = v_1 + 2v_2 - v_3$$

ومنها فإن v تركيب خطي من v_3, v_2, v_1.

تعريف (4-2-5):

إذا كانت $v_1, v_2, \dots, v_n$ متجهات في V، وأن أي متجه v في V هو تركيب خطي من $v_1, v_2, \dots, v_n$، فإن هذه المتجهات يقال بأنها تكّون [أو تولد أو تنشأ] V.

مثال (9):

المتجهات القياسية $i = (1, 0, 0)$, $j = (0\ 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$ في R^3 تولد (تنشأ) R^3 وذلك لأن أي متجه $v = (a, b, c)$ في R^3 يمكن كتابته بالشكل:

$$v = (a, b, c) = a\,(1, 0, 0) + b\,(0, 1, 0) + c\,(0, 0, 1)$$

$$= ai + bj + ck$$

∴ v تركيب خطي من k, j, i.

ملاحظة:

إذا كانت $v_1, v_2, \dots, v_n$ تنشأ الفضاء V، فإننا نقول بأنها Span (V).

مثال (10):

$1, x, x^2, \dots, x^n$ تنشأ فضاء المتجهات P^n مجموعة جميع متعددات الحدود من الدرجة n) وذلك لان أي متعددة حدود $P \in Pn\,(x)$ هي عبارة عن تركيب خطيب من $1, x, x^2, \dots, x^n$، أي:

$$P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

مثال (11):

المصفوفات $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تنشأ فضاء المتجهات = M_{2x2}

$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\}$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية وذلك لان أي مصفوفة في M_{2x2} هي تركيب خطي من المصفوفات. أي أن:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مبرهنة (5-2-5):

لتكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ مجموعة جزئية من V، فإن:

1. مجموعة جميع التراكيب الخطية لمتجهات S، تكتب $L(S)$، تكّون فضاءً جزئيا من V.
2. إذا كانت W فضاء جزئي آخر في V يحوي S فإن $L(S) CW$. بمعنى آخر $L(S)$ هو أصغر فضاء جزئي يحوي S ويسمى الفضاء الجزئي المتولد من S.

البرهان:

1. نفرض أن u, v متجهان في $L(S)$ ، أي:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

$$u = d_1v_1 + d_2v_2 + \dots + d_nv_n$$

إذن:

$$v + u = (c_1 + d_1)\, v_1 + (c_2 + d_2)\, v_2 + \dots + (c_n + d_n)\, v_n$$

عليه:

$$v + u \in L(S)$$

وكذلك:

$$kv = k(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n)$$
$$= (kc_1)V_1 + (kc_2)V_2 + \ldots + (kc_n)V_n$$

عليه:

$$k\,v \in L(S)$$

إذن كل من $v + u$ و kv في $L(S)$. عليه $L(S)$ فضاء جزئي من V. لما كـان أي متجه في S يمكن كتابته.

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 1v_i + 0v_{i+1} + \ldots + 0v_n$$

فإن $L(S)$ يحتوي على جميع المتجهات $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

2. نفرض أن W فضاء جزئي يحوي S. لما كـان W مغلـق بالنسـبة للجمـع والضـرب بكمية ثابتة. لذلك فإن W يحوي على جميع التراكيب الخطية.

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots c_n v_n$$

لكل المتجهات $v_1, v_2, \ldots, v_n$ عليه $L(S) \subset W$.

مبرهنة (6-2-5):

لتكن $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ و $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعتـان في V، فـإن الفضاء الجزئي المتولد بواسطة S = الفضاء المتولد بواسطة S' إذا وفقط إذا كـل متجـه في S' هو تركيب خطي من متجهات S وبالعكس.

البرهان: يترك للطالب

تمارين (2-5)

1. استخدم مبرهنة (2-2-5)، برهن أي مما يأتي فضاء جزئي من R^3
   a. جميع المتجهات التي شكلها $(a, 0, 0)$.
   b. جميع المتجهات التي شكلها $(0, b, c)$.
   c. جميع المتجهات التي شكلها (a, b, c) بحيث $b = a + c$.
2. لتكن $v = (2, 4, 0)$ و $u = (1, -1, 3)$ في R^3. هل أن:
   a. $(3, 3, 3)$ تركيب خطي من u, v أم لا.
   b. $(1, 5, 6)$ تركيب خطي من u, v أم لا.
3. هل أن المتجهات الآتية تولد R^3 أم لا. برهن ذلك.
   a. $v_3 = (3, 0, 3)$, $v_2 = (2, 2, 0)$, $v_1 = (1, 1, 1)$
   b. $u_3 = (8, -1, 8)$, $u_2 = (4, 1, 3)$, $u_1 = (2, -1, 3)$
4. عبر عما يلي:
   a. $6 + 11x + 6x^2$
   b. $-7 + 8x + 9x^2$

   بشكل تركيب خطي لمتعددات الحدود:

$$P_3 = 1 - x + 3x^2 \quad , \quad P_2 = 2 + x + 4x^2 \quad , \quad P_1 = 3 + 2x + 5x^2$$

5. a. هل أن $1 - x$, $3 - x^2$ تنشأ P_2 أم لا. برهن ذلك.
   b. هل أن $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ تنشأ M_{22}.
6. بين أن:

$v_3 = (-1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 4, -1)$, $v_1 = (1, 6, 4)$

$u_2 = (1, -2, -5)$, $u_1 = (0, 8, 9)$

تنشئان نفس الفضاء R^3.

5-3 الاستقلال الخطي:

لإيجاد متجهات تولد أو تنشأ فضاء متجهات فإننا سنعتمد على فكرة الاستقلال الخطي.

تعريف (5-3-1):

مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ من فضاء المتجهات V تكون مستقلة خطية إذا وفقط إذا كان:

$$c_1v_1 + c_1v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$$

بحيث $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

وتسمى مجموعة غير مستقلة خطياً (مرتبطة خطياً) إذا وفقط إذا

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$$

بحيث $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ليست جميعها أصفار.

مثال (1):

المتجهات القياسية $i = (1\ 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$ في R^3 مستقلة خطية.

نفرض $c_1 (1, 0, 0) + c_2 (0, 1, 0) + c_3)0, 0, 1) = 0$

إذن $(c_1, 0, 0) + (0, c_2, 0) + (0, 0, c_3) = 0$

عليه $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

مثال (2):

المتجهات $v_1 = (2\ -1, 0, 3)$, $v_2= (1, 2, 5, -1)$, $v_3 = (7, -1, 5, 8)$ غير مستقلة خطياً لأن:

$$3v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

لاحظ أن $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$

مثال (3):

متعددات الحدود $1, x\, x^2, \dots, x^n$ مستقلة خطياً في P_n وذلك لأن إذا كانت

$$c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = 0$$

وبما أن المعادلة غير الصفرية تحتوي على nمن الجذور فإن $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ وهو المطلوب.

مبرهنة (2-3-5):

1. المتجهات $v_1, v_2, \dots, v_n$ غير مستقلة خطياً (مرتبطة خطياً) إذا وفقط إذا كان أحد المتجهات على الأقل هو تركيب خطي لبقية المتجهات.
2. إذا كانت المتجهات $v_1, v_2, \dots, v_n$ مستقلة خطياً إذا وفقط إذا لا يجد متجه يكون تركيباً خطياً لبقية المتجهات.

البرهان:

1. لتكن $S = \{v_1, \ _2, \dots, v_n\}$. نفرض أن S مرتبطة خطياً، لذا توجد $c_n, \dots, c_2, c_1$ ثوابت ليست جميعها أصفار بحيث:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$$

نفرض $c_1 \neq 0$، فإن المعادلة أعلاه تكتب بالشكل:

$$v_1 = \left(\frac{-c_2}{c_1}\right)v_2 + \dots + \left(\frac{-c_n}{c_2}\right)v_n$$

عليه v_1 هو تركيب خطي لبقية المتجهات من S.

الآن نفرض العكس وهو أن أحد المتجهات تركيب خطي من البقية أي

$$v_1 = c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

نستنتج من ذلك:

$$v_1 - c_2v_2 - \dots - c_nv_n = 0$$

بحيث $c_n, \dots, c_2, c_1$ ليست جميعها أصفار.

عليه فإن S مرتبطة خطياً. بنفس الطريقة بقية المتجهات عدا v_1.

2. برهان الفرع الثاني يترك كتمرين للطالب.

مثال (4):

لتكن $v_1 = (2, -1, 0, 3)$, $v_2 = (1, 2, 5, -1)$, $v_3 = (7, -1, 5, 8)$ متجـهات في R^3 ، فإن أي متجه يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهين البـاقين وهـذا واضـح مـن خـلال العلاقة:

$$3v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

أي: $v_1 = -\frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$, $v_2 = -3v_1 + v_3$ وأخيراً $v_3 = 3v_1 + v_2$

مبرهنة (3-3-5):

1. المجموعة المنتهية من المتجهات التي تحتوي على المتجه الصفري تكون غير مستقلة خطياً.
2. المجموعة المتكونة على الأكثر مـن متجـهين تكـون مسـتقلة خطيـاً إذا وفقـط إذا لا يكون أحد المتجهين يساوي مضروب الآخر بكمية ثابتة.

البرهان:

نبرهن الفرع الأول ونترك الفرع الثاني كتمرين.

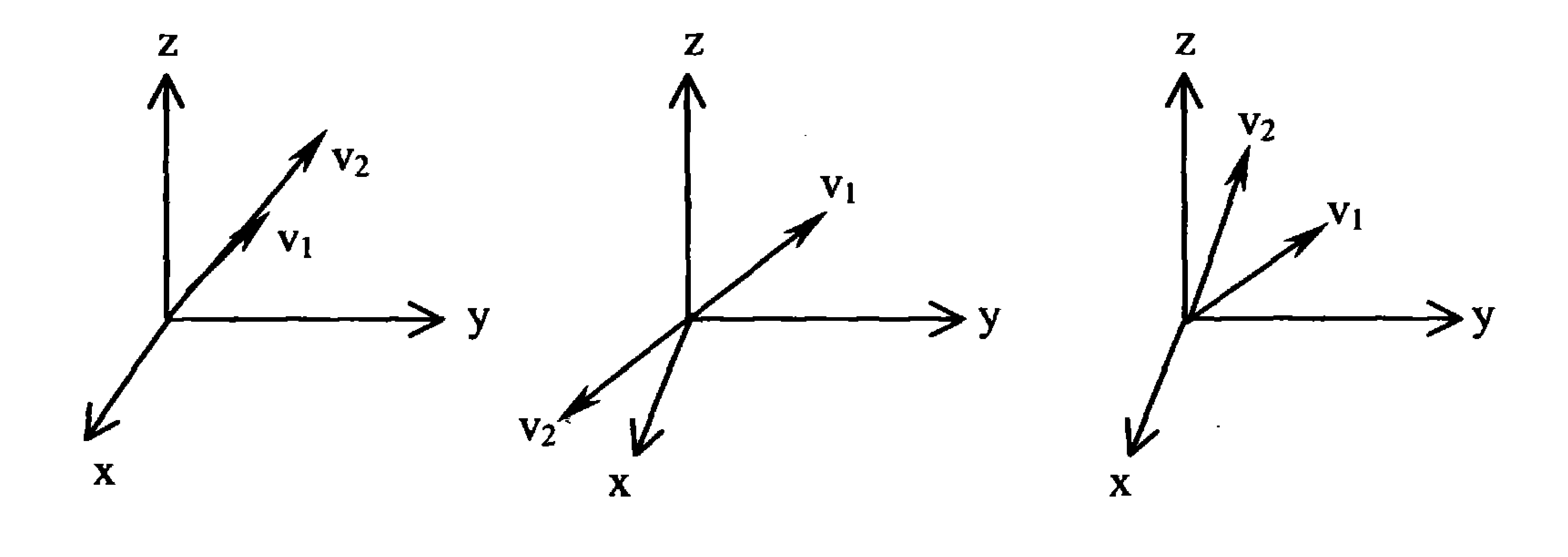
1. لتكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ متجهات في R^n فإن المجموعة: $W = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, 0\}$ غير مستقلة خطياً وذلك لأن المعادلة:

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n + 1.0$$

هي تركيب خطي للصفر وإن جميع المعاملات لا تساوي أصفار.

ملاحظة:

يمكـن التعبـير هندسـياً عـن المتجـهات المسـتقلة وغـير المسـتقلة خطيـاً (لاحظ الشكل 3-5).



(a) غير مستقلة خطياً

(b) غير مستقلة خطياً

(c) مستقلة خطياً

شكل (3-5)

5-4 الأساس والبعد:

مما تقدم نستطيع القول أن الخط المستقيم لـه بعـد واحـد والمسـتوى لـه بعديـن والفضاء من حولنا له ثلاثة أبعاد. في هذا البند سندرس وبشكل أكـثر دقـة وتفصيـلاً بعد فضاء المتجهات.

تعريف (1-4-5):

لتكن V فضاء متجهات و $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة منتهية من متجهات V يقال بأن S هي أساس للفضاء إذا تحققت الشروط الآتية:

1. S مستقلة خطياً.
2. S تنشأ (تكوّن) V.

مثال (1):

نفرض $V= R^3$، مجموعة المتجهات $S=\{(0, 0, 1),(0, 1\ 0),(1, 0\ ,0)\}$ هي أساس R_3 وذلك لأن S مستقلة خطياً، كذلك فإن أي متجه في R^3 يمكن كتابته:

$$v = (a, b, c) = a\ (1, 0, 0) + b\ (0, 1, 0) + c\ (0, 0, 1)$$

حيث c, b, a أعداد حقيقية.

لذا فإن S تولد R. عليه فإن S أساس R^3، هذا الأساس يسمى الأساس الطبيعي.

مثال (2):

برهن أن $S = \{x^2 + 1, x - 1, 2x + 2\}$ أساس لفضاء المتجهات P_2 نـبرهن أولاً أن S تنشأ (تكون) P_2.

ليكن $ax^2 + bx + c$ عنصراً لا على التعيين في P_2، نفرض أن

$$ax^2 + bx + c = k_1\ (x^2 + 1) + k_2\ (x - 1) + k_2\ (2x + 2)$$

$$= k_1x^2 + (k_2 + 2k_2)\ x + (k_1 - k_2 + 2k_3)$$

وبالمقارنة:

$$k_1 = a$$

$$k_2 + 2k_2 = b$$

$$k_1 - k_2 + 2k_3 = c$$

وبحل حل هذه المعادلات نحصل على:

$$k_3 = \frac{b + c - a}{4} \quad , \quad k_2 = \frac{a + b - c}{2} \quad , \quad a = k_1$$

عليه فإن S تولد P_2.

ولكي نبرهن أن S مستقلة خطياً نفرض:

$$c_1\ (x^2 - 1) + c_2\ (x - 1) + c_3\ (2x + 2) = 0$$

$$c_1x^2 + (c_2 + 2c_3)\ x + (c_1 - c_2 + 2c_3) = 0$$

عليه:

$c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \quad , \quad c_2 + 2c_3 = 0 , c_1 = 0$

وبحل هذه المعادلات نحصل على $c_1 = c_2 = c_3 = 0$، أي أن S مستقلة خطياً.

إذن S هي أساس لفضاء المتجهات P_2.

مثال (3):

نفرض أن $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ لذا فإن S أساس M_{2x2}.

لتكن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متجه في M_{2x2} وبما أن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ يمكن كتابة بالشكل:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهذا يعني أن S تولد M_{2x2}.

وبفرض التركيب أعلاه يساوي $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ نستنتج أن $a = b = c = d = 0$، أي أن S مستقلة خطياً. عليه فإن S أساس M_{2x2}.

مبرهنة (2-4-5):

لتكن $S = \{v_1, v_2, \dots , v_n\}$ أساس لفضاء المتجهات V، فإن كل متجه $v \in V$ يكتب بطريقة واحدة فقط كتركيب خطي من متجهات S.

البرهان:

نفرض أن v يكتب بطريقتين بالشكل:

$v = a_1v_1+a_2v_2+\dots\dots+a_nv_n$

$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n$

سنبرهن أن $a_i = b_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

بطرح المعادلتين نحصل على:

$$0 = (a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \dots + (a_n - b_n) v_n$$

وبما أن S مستقلة خطياً.

عليه فإن $a_1 - b_1 = 0$ ومنها $a_1 = b_1$ وبنفس الطريقة:

$a_2 - b_2 = 0$ ومنها $a_2 = b_2$

$\vdots$ $\vdots$

$a_n - b_n = 0$ ومنها $a_n = b_n$

ملاحظة:

إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساس فضاء المتجهات ولكل $v \in V$، $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$ ، فإن $c_1, c_2, \dots, c_n$ تسمى إحداثيات v نسبة للأساس S. أما المتجه $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ في الفضاء الإقليدي يسمى متجه إحداثيات v نسبة للأساس ويرمز له.

$$(V)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

مثال (4):

لاحظنا في المثال 1 أن المتجه $v = (a, b, c)$ في R^3 يكتب بالشكل:

$$v = (a, b, c) = ai + bj + ck$$

حيث $S = \{i, j, k\}$ هي مجموعة متجهات الأساس الطبيعي، لذا فإن إحداثيات v بالنسبة للأساس الطبيعي في R^3 هي c, b, a أي أن:

$$(V)_S = (a, b, c)$$

وبصورة عامة إذا كانت $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ هي الأساس الطبيعي للفضاء الإقليدي R^n حيث:

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_{32} = (0, 1, 0, \dots, 0)$

$\vdots \qquad \vdots$

$e_n = (0, 0, \dots, 1)$

ولما كان أي متجه $v \in R^n$ يمكن كتابته بالشكل:

$v = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_n e_n$

فإن

$(V)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

مثال (5):

أوجد متجه إحداثيات $v = (5, -1, 9)$ إذا علمت أن

$S = \{ (1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)$

بما أن $(5, -1, 9) = c_1 (1, 2, 1) + c_2 (2, 9, 0) + c_3 (3, 3, 4)$

وبتساوي مركبات طرفي المعادلة نحصل:

$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5$

$2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = -1$

$c_1 \qquad + 4c_3 = 9$

وبحل المعادلات نحصل على:

$c_3 = 2 \;, c_2 = -1 \;, c = 1$

إذن:

$(V)_S = (1, -1, 2)$

مثال (6):

ليكن S كما في مثال 5، $v \in R^3$ حيث $(V)_S = (-1, 3, 2)$ أوجد V. بموجب مثال 5 وتعريف $(V)_S$:

$$v = (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7)$$

تعريف (3-4-5):

يقال لفضاء المتجهات غير الصفري V بأنه ذات البعد المنتهي إذا كان يحتوي على مجموعة منتهية من المتجهات $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تكون أساساً له. إذا لم توجد تلك المجموعة فإن V يقال له فضاء متجهات ذات البعد غير المنتهي.

مثال (7):

فضاء المتجهات في الأمثلة 1 و 2 و 3 ذات البعد المنتهي.

مبرهنة (4-4-5):

لتكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساس لفضاء المتجهات المنتهي V فإن:

1. أي مجموعة تحتوي على أكثر من n من المتجهات تكون غير مستقلة خطياً.
2. لا توجد مجموعة تحتوي على أقل من n تنشأ (تكّون) V.

البرهان:

1. نفرض $T = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ مجموعة من متجهات V، حيث $m > n$، بما أن S أساس V فإن أي متجه w_i في V يمكن كتابته كتركيب خطي من متجهات S. أي:

$$w_1 = c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \dots + c_{n1}v_n$$

$$w_2 = c_{12}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{n2}v_n \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$w_m = c_{1m}v_1 + c_{2m}v_2 + \dots + c_{nm}v_n$$

لكي نبرهن أن T غير مستقلة خطياً يجب أن نجد ثوابت $k_1, k_2, \dots, k_m$ ليست جميعها أصفار بحيث:

$$k_1 w_1 + k_2 w_1 + \dots + k_m w_m = 0 \quad \dots\dots (2)$$

بالتعويض عن $w_1, w_2, \dots w_m$ نحصل على:

$$(k_1c_{11} + k_2 c_{12} + \dots + k_m c_{1m})\, v_1 + (k_1c_{21} + k_2c_{22} + \dots + k_mc_{2m})\, v_2 + \dots + (k_1c_{n1} + k_2c_{n2} + \dots + k_mc_{nm})\, v_n$$

بما أن S مستقلة خطياً فإن برهان T غير مستقلة خطياً يؤول إلى برهان أن الثوابت $k_1, k_2, \dots, k_m$ ليست جميعها أصفار والتي تحقق

$$\begin{aligned}
c_{11}k_1 + c_{12}k_2 + \dots + c_{1m}k_m &= 0 \\
c_{21}k_1 + c_{22}k_2 + \dots + c_{2m}k_m &= 10 \quad \dots\dots (3) \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \quad \vdots \\
c_{n1}k_1 + c_{n2}k_2 + \dots + c_{nm}k_m &= 0
\end{aligned}$$

ولما كان عدد المتغيرات أكثر من عدد المعادلات فإن من الفصل الأول سنحصل على حلولاً ليست صفرية.

برهان 2:

لتكن $T = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ مجموعة m من المتجهات في V حيث $m < n$.

نريد أن نبرهن أن T لا تنشأ V. لذا نفرض أن T تنشأ V، عليه فإن أي متجه في V هو تركيب خطي لمتجهات T.

لذا:

$$\begin{aligned}
v_1 &= c_{11}w_1 + c_{21}w_2 + \dots + c_{m1}w_m \\
v_2 &= c_{12}w_1 + c_{22}w_2 + \dots + c_{m2}w_m \quad \dots\dots (4) \\
\vdots \qquad & \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\
v_n &= c_{1n}w_1 + c_{2n}w_2 + \dots + c_{mn}w_m
\end{aligned}$$

وللحصول على التناقض سنبين وجود $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ليست جميعها أصفار بحيث:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n = 0 \qquad (5)$$

بالتعويض عن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ نحصل على:

$$c_{11}k_1 + c_{12}k_2 + \ldots + c_{1n}k_n = 0$$

$$c_{21}k_1 + c_{22}k_2 + \ldots + c_{2n}k_n = 0 \qquad (6)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$c_{m1}k_1 + c_{m2}k_2 + \ldots + c_{mm}k_n = 0$$

وبموجب الفصل الأول فإن هذا النظام الخطي يعطينا حلولاً غير صفرية لأن عدد المتغيرات أكبر من عدد المعادلات.

مبرهنة (5-4-5):

جميع أساسات فضاء المتجهات ذات البعد المنتهي تحتوي على نفس العدد من المتجهات.

البرهان:

يترك كتمرين (تلميح: استخدم مبرهنة 4-4-5).

تعريف (5-4-6):

يعرف بعد فضاء المتجهات V بأنه عدد المتجهات في أساس V، يرمز له بالرمز dim (V). بعد الفضاء الصفري يساوي صفر.

مثال (8):

في المثال 1، $\dim R^3 = 3$

في المثال 2، $\dim P_2 = 3$

في المثال 3، $\dim M_{2x2} = 4$

في المثال 4، $\dim R^n = n$

ملاحظة:

الأساس الطبيعي للفضاء الإقليدي R^n يحتوي على n من المتجهات، أما الأساس الطبيعي للفضاء P_n فيحتوي على 1 + n من المتجهات، وأخيراً الأساس الطبيعي للقضاء M_{mxn} يحتوي على mn من المتجهات.

مبرهنة (7-4-5):

لتكن S مجموعة غير خالية من المتجهات في فضاء المتجهات V:

1. إذا كانت S مجموعة مستقلة خطياً و $v \in V$ متجه خارج S فإن المجموعة الناتجة من إضافة v إلى S ستبقى مستقلة خطياً.
2. إذا كان $v \in S$ يمكن التعبير عنه كتركيب خطي لبقية المتجهات في S وإذا حذفنا v من S فإن متجهات S الباقية تنشأ نفس فضاء المتجهات V.

البرهان:

1. نفرض أن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ مجموعة مستقلة خطياً في V و $v \in V$ خارج S.

نريد أن نبرهن ان $T = \{v_1, v_2, \dots, v_r, v\}$ مستقلة خطياً أيضاً. ولكي نبرهن T مستقلة خطياً فإنه يجب أن تكون

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r + k_{r+1}v = 0 \quad \dots\dots (7)$$

حيث $k_1 = k_2 = \dots = k_r = k_{r+1} = 0$ ومن هذا يجب أن تكون $k_{r+1} = 0$ لأن عكس ذلك يعني أن v يمكن كتابته كتركيب خطي من $v_1, v_2, \dots, v_r$ والذي يناقض حقيقة كون v خارج S. لهذا فإن العلاقة 7 يمكن تبسيطها إلى:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r = 0 \quad \dots\dots (8)$$

وبما أن S مجموعة مستقلة خطياً فإن $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$

2. نفرض أن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ مجموعة من متجهات V. افترض أن أحد متجهات S وليكن V_r تركيب خطي من $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$. أي

$$v_r = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_{r-1}v_{r-1} \quad \dots\dots (9)$$

نريد أن نبرهن أنه إذا حذفنا V_r من S فإن المتجهات الباقية $\{v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}\}$ تنشأ نفس الفضاء، بمعنى آخر، يجب أن نبين أنه أي متجه u في Span S يمكـن التعبـير عنه كتدريب خطي من $\{v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}\}$. لكن $u \in \text{Span } S$، عليه فإن:

$$u = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_{r-1}v_{r-1} + k_rv_r$$

وبتعويض v_r نحصل على:

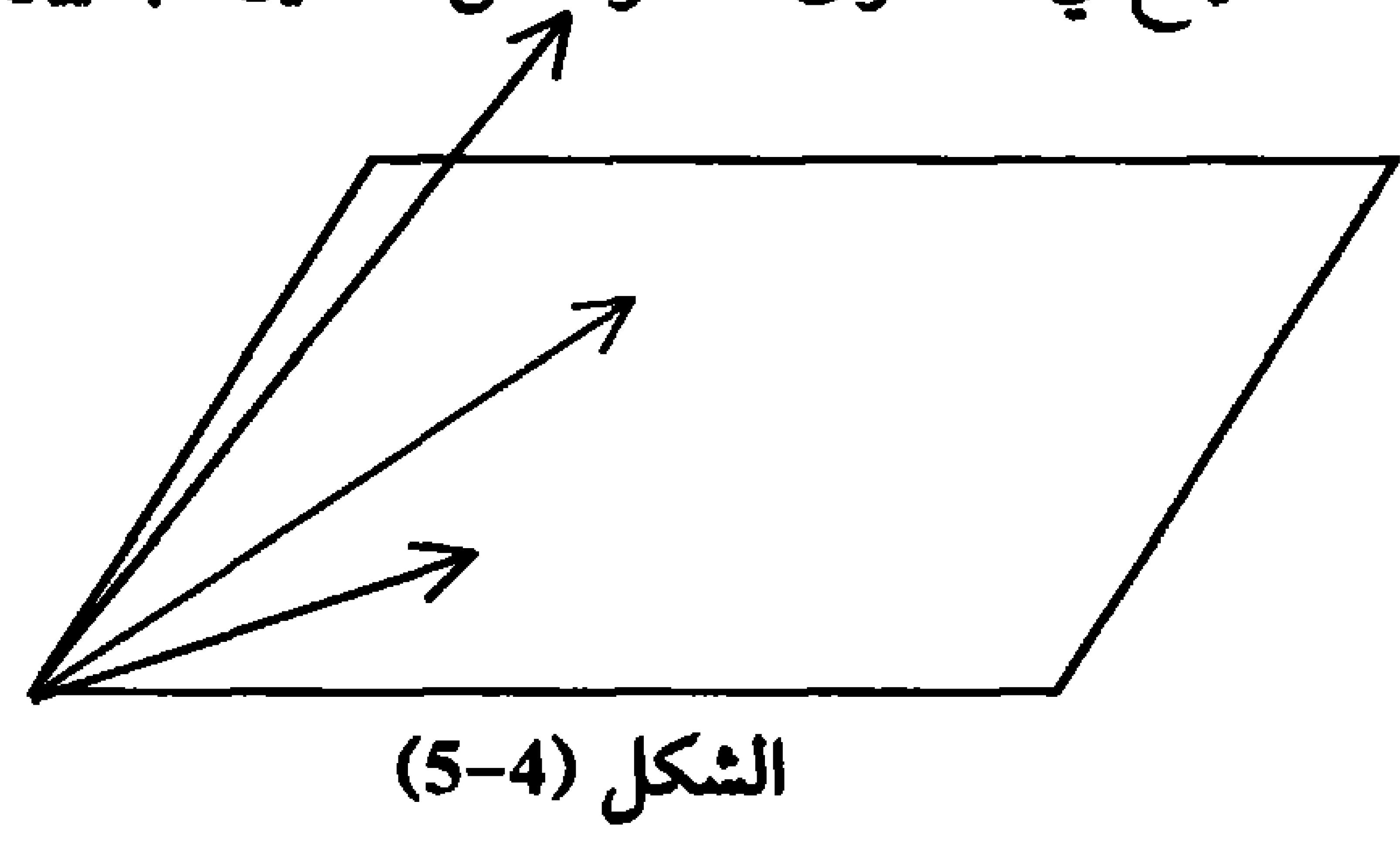
$$u = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_{r-1}v_{r-1} + k_r(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_{r-1}v_{r-2})$$

ومن العلاقة أعلاه نستنتج أن u يعبر عنها كتركيب خطي من $v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}$.

مثال (9):

يمكن وصف المبرهنة (7-4-5) في الفضاء R^3.

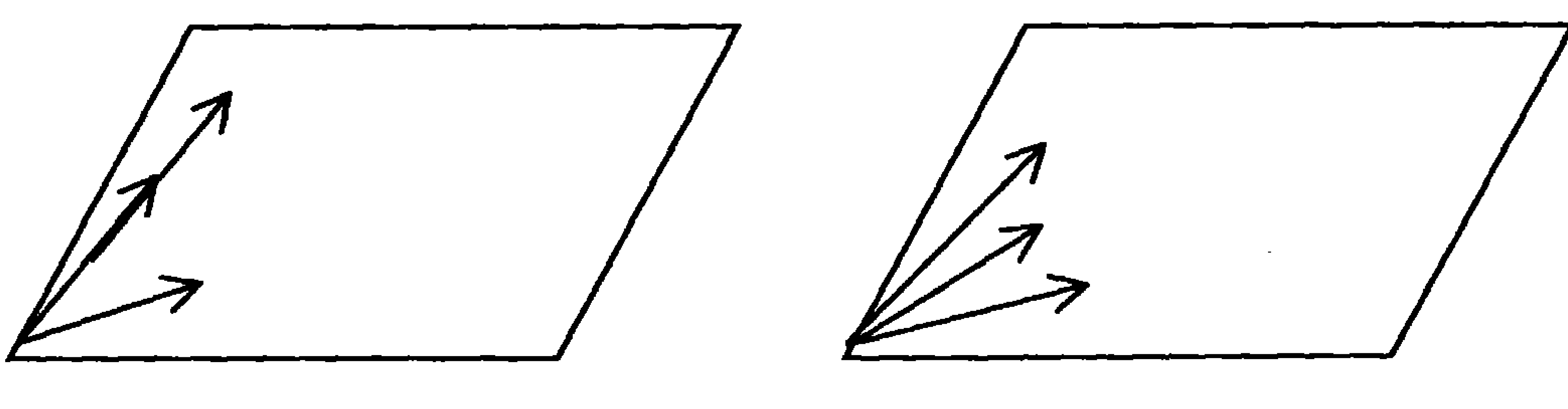
1. نفرض S مجموعة متكونة من متجهين مستقلين خطياً في R^3 تنشـأ المسـتوى خـلال نقطة البداية (الشكل 5-5) ، إذا أدخلنا متجه إضافي مثل v خـارج المسـتوى، فـإن المجموعة الناجمة من ثلاث متجهات ستبقى مستقلة خطياً وذلك لأن أي متجه مـن المتجهات الثلاث لا يقع في المستوى المتكون من الاثنين الباقيين.



الشكل (4-5)

لا يقع أي من المتجهات الثلاث في مستوي الاثنين الباقين

2. نفرض أن S متكونـة مـن ثـلاث متجـهات غـير متطابقـة في R^3 وتقـع جميعـها في المستوى المشترك خلال نقط البداية، إذن المتجـهات الثـلاث تنشـأ المسـتوين. فـإذا حذفنا أحد المتجهات من S فإن المجموعة المتبقية المتكونة مـن متجـهين تبقـى تنشـأ نفس المستوى (لاحظ الشكل 6-5).



شكل (5 -5)

يمكن حذف أي متجه مع بقاء المتجهين الباقيين يولدان المستوى

يمكن حذف أي من المتجهين المتطابقين مع بقاء الاثنين الباقيين يولدان المستوى

مبرهنة (8-4-5):

لتكن V فضاء متجهات ذي البعد n. إذا كانت S هي مجموعة تحتوي بالضبط على n من المتجهات في V، فإن S أساس V إذا كانت S تنشأ V أو S مستقلة خطية.

البرهان:

نفرض أن S تنشأ V. ولكي تكون S أساس V فيجب أن نبرهن أن S مستقلة خطياً. نفرض العكس (أي أن S غير مستقلة خطياً) عليه يوجد v في S هو تركيب خطي من بقية المتجهات، وبحذف هذا المتجه من S وباستخدام مبرهنة (7-4-5) فإن مجموعة n-1 من المتجهات الباقية ستنشأ V ولكن هذا يتناقض مع مبرهنة (4-4-5) الجزء الثاني. عليه فإن S مستقلة خطياً.

والآن نفرض أن S مستقلة خطياً، ولكي نبرهن أن S أساس V فيجب أن نبين أن S تنشأ V. نفرض العكس (أي S لا تنشأ V). نستنتج من ذلك بأنه يوجد متجه مثل v في V لا ينتمي إلى S، وبإضافة هذا المتجه فإننا وبوساطة مبرهنة (7-4-5) نحصل على مجموعة متجهات عددها n + 1 مستقلة خطياً. لكن هذا يناقض مبرهنة (4-4-5) الجزء الأول، لذا فإن S تنشأ V.

مثال (10):

المتجهين (4, 4) و (3 ,1-) في R^2 تكّون أساس للفضاء R^2 وذلك لأن أحد المتجهين لا يساوي مضروب الآخر. عليه فإنهما يكونان مجموعة مستقلة خطياً في R^2. وبوساطة مبرهنة (8-4-5) فإنهما يكونان أساس R^2

مثال (11):

المتجهات $u_1 = (1, 0, 1)$ ،$u_2 = (2, 0, -1)$ ،$u_3 = (1, 2, 1)$ تكون أساس للفضاء R^3 وذلك لأن u_1 و u_2 متجهان مستقلان خطياً في المستوى -xz وكذلك المتجه u_3 يقع خارج المستوى -xz. لذا فمجموعة المتجهات $\{u, u_2, u_3\}$ تكون مستقلة خطياً ولما كان $dimR^3 = 3$ فإن مبرهنة (8-4-5) تعطينا الإجابة وهي أن $\{u_1, u_2, u_3\}$ أساس R^3.

مبرهنة (9-4-5):

لتكن S مجموعة منتهية من المتجهات في V ذي البعد n، فإن:

1. إذا كانت S مجموعة تنشأ V لكنها ليست أساس إلى V، فإن بالإمكان اختزال S لكي تصبح أساس إلى V من خلال حذف متجهات معينة من S.
2. إذا كانت S مجموعة مستقلة خطياً لكنها ليست أساساً إلى V، فإن بالإمكان توسيع S لكي تصبح أساس بإدخال متجهات معينة إلى S.

البرهان:

1. نفرض أن S مجموعة من المتجهات تنشأ V لكنها ليست أساسًا لها. لذا فإن متجه ما في S وليكن u هو تركيب خطي للمتجهات الباقية في S. بوساطة مبرهنة (7-4-5) يمكن حذف u من S والمجموعة الباقية T ستبقى تنشأ V.

إذا كانت T مستقلة خطياً فإنها ستكون أساس V وهذا هو المطلوب. أما إذا كانت T غير مستقلة خطياً نكرر الخطوة السابعة بحذف متجه ما من T لنحصل على T التي تنشأ V. نستمر في إجراء الطريقة السابقة حتى نحصل على مجموعة من متجهات S ستكون مستقلة خطياً وتنشأ V. المجموعة الجزئية هذه ستكون أساساً إلى V.

2. نفرض $\dim V = n$ فإذا كانت S مستقلة خطياً لكنها لا تكون أساسًا إلى V وهذا يعني أن S لا تنشأ V، بمعنى آخر، يوجد متجه مثل v في V خارج S. لذا وبوساطة مبرهنة (7-4-5) يمكننا إضافة v إلى S وتكون النتيجة الحصول على المجموعة T وتكون مستقلة خطياً.

إذا كانت T تكون V، فإن T ستكون أساس V وهذا هو المطلوب. أما إذا كانت T لا تنشأ V، فإننا نضيف متجه ما آخر إلى T للحصول على 'T التي تبقى مستقلة خطياً. نستمر بهذه الطريقة بإدخال متجهات معينة حتى نحصل على مجموعة متكونة من n من المتجهات المستقلة خطياً في V، بوساطة مبرهنة (7-4-5) فإن هذه المجموعة ستكون أساساً للفضاء V.

مثال (12):

لتكن $T = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ حيث: $v_1 = (1, 0, 1)$، $v_2 = (0, 1, 1)$، $v_3 = (1, 1, 2)$، $v_4 = (1, 2, 1)$، $v_5 = (-1, 1, -2)$ حقق صحة المبرهنة (9-4-5)؟

الحل:

واضح أن T تنشأ V. سنقوم بإيجاد مجموعة جزئية من T بحيث تكون أساساً إلى V. T غير مستقلة خطياً لأن:

$$2v_1 + v_2 - v_4 + v_5 = 0$$

لذلك $v_5 = 2v_1 - v_2 + v_4$

ليكن $v \in V$ فإن:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + c_5v_5$$

أي أن

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + c_5(-2v_1 - v_2 + v_4)$$

وهذا يعني أن v تركيب خطي للمتجهات v_4, v_3, v_2, v_1 أي أن:

$$T' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

ولكن 'T غير مستقلة خطياً لأن:

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

أي أن $v_3 = v_1 + v_2$

بحذف v_3 من 'T (لماذا؟) نحصل على $T'' = \{v_1, v_2, v_3\}$ والتي تكون V.

وبما أن ''T مستقلة خطياً (لماذا؟) عليه فإن T أساس V.

مبرهنة (5-4-10):

لتكن U فضاء جزئي من V. ذي البعد المنتهي، فإن $\dim U \leq \dim V$. إذا كان $\dim U = \dim V$ فإن $U = V$.

البرهان:

نفرض أن $T = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ أساس U، لذا فإن T أساس V أو ليس كذلك. فإذا كان T أساس V فإن $\dim (U) = \dim (V) = m$ وإذا كانت T ليست أساس V فبوساطة مبرهنة (5-4-9) نستطيع إضافة متجهات لمجموعة المتجهات المستقلة خطياً لكي تصبح أساس إلى V. لذا فإن $\dim (U) < \dim (V)$. عليه فإن $\dim (U) \leq \dim (V)$ في جميع الحالات.

إذا كان $\dim (U) = \dim (V)$ فإن T هي مجموعة متكونة من m من المتجهات المستقلة خطياً في فضاء المتجهات ذي البعد m.

عليه فإن T هي أساس V بموجب (5-4-8) نستنتج أن $U = V$

مثال (13):

لتكن W فضاءً جزئياً في R^3. بموجب مبرهنة (5-4-10) فإن $\dim w$ يمكن أن يكون: صفر، 1، 2 أو 3. لذا ستكون لدينا الاحتمالات الآتية:

1. إذا كان $\dim w = 0$ فإن $w = \{0\}$ أي أن w نقطة.
2. إذا كان $\dim w = 1$ فإن w ستكون مستقيم يمر بنقطة البداية.
3. إذا كان $\dim w = 2$ فإن w ستكون مستوى يمر بنقطة البداية.
4. إذا كان $\dim w = 3$ فإن w ستكون الفضاء R^3.

تمارين (4-5)

1. أي من مجموعة المتجهات الآتية تكون أساس إلى R^2.

a. $\{(3, 2), (1, 1)\}$ b. $\{(0, 1), (0, -3)$

c. $\{(0, 2), (1, -1), (2, 1)\}$

2. أي من مجموعة المتجهات الآتية تكوّن أساساً للفضاء R^3.

a. $\{(-1, 3, 1), (2, 1, 4)\}$ b. $\{(2, 1, -3), (4, 0, 2), (2, -1, 3)\}$

c. $\{(-1, 3, 4), (1, 5, -1), (1, 3, 2)\}$

3. أي من مجموعة المتجهات الآتية أساساً للفضاء P_2.

a. $\{(x, x^2 + 1, (x - 1)^2\}$ b. $\{1-3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1-7x\}$

4. برهن أن مجموعة المتجهات الآتية هي أساس للفضاء M_{2x2}.

$$\left\{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

5. أوجد أساس مجموعة المتجهات الواقعة في المستوى

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0\right\}$$

6. أوجد إحداثيات المتجه $v = (2, -1, 3)$ نسبة للأساس $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ حيث $v_3 = (3, 3, 3), v_2 = (2, 2, 0), v_1 = (1, 0, 0)$.

7. أوجد إحداثيات المتجه P نسبة للأساس $S = \{P_1, P_2, P_3\}$ حيث $P = 4 - 3x + x^2$

$P_3 = x^3$, $P_2 = x$, $P_1 = 1$

8. أوجد بعد الفضاء الجزئي $\{(a, b, c, 0)\}$ في R^3 حيث c, b, a أعداد حقيقية.

9. أوجد متجه الأساس الطبيعي الذي نضيفه للمجموعة $\{v_1, v_2\}$ لكي نحصل على أساس R^3، حيث $v_2 = (1, -2, -2)$, $v_1 = (-1, 2, 3)$

10. إذا كانت $\{v_1, v_2, v_3\}$ أساس الفضاء V، بين أن $\{u_1, u_2, u_3\}$ هو كذلك أساس، حيث $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$, $u_2 = v_1 + v_2$, $u_1 = v_1$

5-5 فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة والفضاء الصفري:

نناقش في هذا البند بعض أنواع فضاء المتجهات وعلاقتها بالمصفوفات:

تعريف (1-5-5):

لتكن A مصفوفة سعتها m × n بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

المتجهات:

$r_1 = a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}$

$r_2 = a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n}$

$\vdots$

$r_m = a_{m1}\ a_{m2} , \ldots , a_{mn}$

في R^n تسمى متجهات الصفوف من A، والمتجهات:

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} , \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} , \ldots , C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى متجهات أعمدة A.

مثال (1):

لتكن $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ فإن متجهات صفوف A هي:

$$v_1 = [-1\ 0\ \ 4] \qquad , \qquad v_2 = [1\ \ 2\ \ 3]$$

ومتجهات أعمدة A هي:

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تعريف (2-5-5):

لتكن A مصفوفة سعتها $m \times n$. الفضاء الجزئي في R^n المتولد من متجهات صفوف A يسمى فضاء الصفوف والفضاء الجزئي من R^m المتولد من متجهات أعمدة A يسمى فضاء الأعمدة. أما فضاء حل نظام المعادلات الخطية المتجانسة $AX = 0$، والذي هو فضاء جزئي من R^n، فيسمى الفضاء الصفري للمصفوفة A.

مثال (2):

في المثال (1) المجموعة $\{r_1, r_2\}$ هي فضاء صفوف A و $\{c_1, c_2, c_3\}$ هي فضاء أعمدة A.

مبرهنة (3-5-5):

يكون النظام $AX = B$ قوياً (يحتوي على الأقل حل واحد) إذا وفقط إذا كان B موجوداً في أعمدة A.

البرهان: لتكن:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad , \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن من خواص ضرب المصفوفات يمكن كتابة AX بالشكل:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2m}x_n \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + X_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

عليه فإن AX يمكن كتابته كتركيب خطي لمصفوفات أعمـــدة A أمـا المعـاملات فهي من المصفوفة X.

لذا:

$$AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \dots + x_nC_n \quad \dots\dots (1)$$

إذن النظام الخطي $AX = B$ الذي يحتوي على m من المعــادلات والـتي تحـتوي على n من المتغيرات يمكن التعبير عنه بالصيغة:

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \dots + x_nC_n = B \quad \dots\dots (2)$$

نستنتج من ذلك أن $AX = B$ له على الأقــل حـل واحـد إذا وفقـط إذا أمكـن التعبير عن B كتركيب خطي من أعمـــدة A، بمعنـى آخـر، إذا وفقـط إذا كـانت B في فضاء أعمدة A.

مثال (3):

نفرض $AX = B$ نظام خطي بالشكل الآتي. برهن أن B تنتمي لفضاء أعمدة A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & -2 & -2 \\ -6 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -2 \\ 24 \end{bmatrix}$$

الحل:

باستخدام طريقة حذف كاوس (برهن ذلك) فإن:

$x_3 = 4 \quad , \quad x_2 = -1 \quad , \quad x_1 = 2$

وبموجب المعادلة (2) نحصل على:

$$2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -2 \\ 24 \end{bmatrix}$$

يتضح من هذا أن B تنتمي لفضاء أعمدة A.

مبرهنة (4-5-5):

إذا كان x_0 يمثل أي حل للنظام الخطي القويم والغير متجانس $AX = B$ ولتكن $v_1, v_2, \dots, v_n$ أساس للفضاء الصفري في A، أي فضاء احل للنظام المتجانس $AX = 0$، فإن أي الحل للنظام يمكن كتابته بالشكل:

$$X = x_0 + c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n \quad \dots\dots (3)$$

وبالعكس لكل اختيارات الثوابت $c_1, c_2, \dots, c_n$ فـإن المتجـه x في العلاقـة (3) هو حل للنظام $AX = B$.

البرهان:

نفرض x_0 أي حل ثابت للنظام $Ax_0 = B$ و x أي حل لا على اليقين فإن:

$Ax = B \quad , \quad Ax_0 = B$

أي أن:

(بطرح المعادلتين) $\quad Ax - Ax_0 = 0$

بمعنى آخر:

$A(x - x_0) = 0$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن $x - x_0$ هو حل للنظام المتجانس $Ax= 0$
بما أن $v_1, v_2, \dots, v_n$ أساس فضاء الحل لهذا النظام فإن:

$$x - x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

إذن:

$$x = x_0 + c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

وبالعكس، لجميع اختيارات $c_1, c_2, \dots, c_n$ في العلاقة (3) يكون لدينا

$$Ax = A\,(x_0 + c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n)$$
$$= Ax_0 + c_1\,(Av_1) + c_2\,(Av_2) + \dots + c_n\,(Av_n)$$

لكن x_0 هو حل للنظام غير المتجانس ولما كان $v_1, v_2, \dots, v_n$ هي حلول النظام المتجانس. لذا فإن المعادلة أعلاه ستكون:

$$Ax = B + 0 + 0 \dots + 0 = B$$

أي أن x هو حل للمعادلة: $AX = B$.

مثال (4):

أوجد الحل العام للنظام الخطي غير المتجانس:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned} \qquad \dots\dots (4)$$

باستخدام طريقة كاوس – جوردان نحصل على الحل الآتي: (تحقق من صحة الحل)

$$x_6 = \frac{1}{3}\ , x_5 = t\ , \quad x_4 = m\ , \quad x_3 = -2m\ , x_2 = n\ , \quad x_1 = -3n - 4m - 2t$$

ويمكن كتابته بشكل متجهات على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3m-4n-2t \\ n \\ -2m \\ m \\ t \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهذا هو الحل العام للنظام الخطي. بالمقارنة مع العلاقة (3) فإن:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

هو الحل الخاص للنظام (4). وكذلك:

$$x = m\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هو الحل العام للنظام الخطي المتجانس في (4).

ملاحظة:

1. عمليات الصف البسيطة لا تغير الفضاء الصفري للمصفوفة وذلك لأننا لاحظنا في الفصل الأول أن العمليات الصفية البسيطة المستخدمة على المصفوفة الممتدة لا تبدل مجموعة حل النظام الخطي المقابل.

لذا فإن عمليات الصف البسيطة على المصفوفة A لا تبدل مجموعة حل النظام الخطي المقابل $AX = 0$، بمعنى آخر، لا تبدل الفضاء الصفري للمصفوفة A.

2. عمليات الصف البسيط لا تبدل فضاء الصفوف للمصفوفة نفرض أن متجهات صفوف A هي $r_1, r_2, \ldots, r_m$ وأن B مصفوفة أمكن الحصول عليها من A بتطبيق عمليات الصف البسيطة على A. سوف نبين أن أي متجه من متجهات فضاء صفوف B هي داخل فضاء صفوف A. وبالعكس أي متجه في فضاء صفوف A هو داخل فضاء B. أي أننا نستطيع أن نقول أن B, A لهما نفس فضاء الصفوف. فلو افترضنا أن عملية الصف البسيطة هي تبديل الصفوف، فإن متجهات صفوف B هي نفسها متجهات صفوف A. لذا فإن A, B لهما نفس فضاء الصفوف، أما إذا كانت العملية الصفية البسيطة هي مضروب صف بكمية ثابتة أو جمع مضروب صف مع صف آخر فإن متجهات صفوف B هي $r'_1, r'_2, \ldots, r'_n$ عبارة عن تركيب خطي لمتجهات صفوف A وهي $r_1, r_2, \ldots, r_n$ عليه فإنها تقع في نفس فضاء صفوف A. لكن فضاء المتجهات هو مغلق تحت عمليتي الجمع والضرب بكمية ثابتة، فإن جميع التركيبات الخطية للمتجهات $r'_1, r'_2, \ldots, r'_n$ تقع في نفس فضاء متجهات A. لذا فإن أي متجه في فضاء صفوف B هو في فضاء صفوف A. وبما أن B يمكن الحصول عليها من A بتطبيق عملية صف بسيطة، فإن A يمكن الحصول عليها من تطبيق معكوس العملية. مما تقدم نستطيع القول بأن فضاء صفوف A محتواه داخل فضاء صفوف B.

3. من (1) و (2) يمكن للمرء أن يتوقع أن عمليات الصف البسيطة سوف لا تبدل فضاء أعمدة المصفوفة. وهذا ليس صحيحاً فعلى سبيل المثال، إذا كانت

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ فإن العمود الثاني هو مضروب العمود الأول بكمية ثابتة، لـذا فـإن فضاء الأعمدة متكون مـن جميـع مضروبـات متجـه العمـود الأول بكميـة ثابتـة. بضـرب الصـف الأول بـالعدد 2- وإضافتـه للصـــف الثـاني ســنحصل علــى $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، لاحظ أن العمود الثاني في B مضروب العمود الأول بكميـة ثابتـة أيضاً، لذا فإن فضاء الأعمدة B يتكون مـن جميـع مضربـات متجـه العمـود الأول ولكن الفضاء ليس هو نفس فضاء أعمدة A.

لإيجاد طريقة نستطيع من خلالها معرفة أساسات فضاءات الصفوف والأعمـدة لمصفوفة ما في الشكل المدرج الصفي فإن المبرهنة الآتية تعتبر مهمة بهذا الاتجاه.

مبرهنة (5-5-5):

لتكن R مصفوفة بالشكل المدرج الصفي، فإن متجهات الصفـوف الـتي تحـوي على الدليل 1 تكّون فضاء صفوف R ومتجهات الأعمدة التي تحوي الدليـل 1 تكّـون فضاء أعمدة R.

مثال (5):

أوجد أساسات فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة للمصفوفة

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بما أن R بالشكل المدرج الصفي وبموجب (5-5-5) فإن المتجهات:

$r1 = (1, -2, 2, -1)$, $r2 = (0\ 0, 1, 1)$ أساس فضاء صفوف R والمتجهات

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هي أساس فضاء أعمدة R.

مثال (6):

أوجد أساسات فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

لإيجاد أساس فضاء صفوف A نحول المصفوفة A للشكل المدرج الصفي ومن ثم نجد أساس فضاء صفوف الشكل المدرج الصفي الناتج.

وباختزال المصفوفة A للشكل المدرج الصفي باستخدام عمليات الصف البسيطة سنحصل على (برهن ذلك):

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عليه فإن المتجهات:

$r_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 5)$, $r_2 = (0, 0, 1, 3, -2, -6)$, $r_1 = (1, -3, 4 -2, 5, 4)$

هي أساس فضاء صفوف A، والمتجهات:

$$C'_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad C'_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad C'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هي أساس فضاء أعمدة R. لذا فإن متجهات أعمدة A المقابلة لها هي:

$$C_3=\begin{bmatrix}5\\8\\9\\-5\end{bmatrix}\ ,\quad C_2=\begin{bmatrix}4\\9\\9\\-4\end{bmatrix}\ ,\quad C_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

عليه فإن المتجهات C_3, C_2, C_1 تكّون أساس فضاء أعمدة A.

مثال (7):

أوجد أساسات فضاء صفوف A وفضاء أعمدتها.

$$A=\begin{bmatrix}2&8&6\\4&2&-2\\3&-1&1\end{bmatrix}$$

بوساطة عمليات الصف البسيطة على A نحصل على (برهن):

$$R=\begin{bmatrix}1&4&3\\0&1&1\\0&0&5\end{bmatrix}$$

عليه فإن $r_1 = (1, 4, 3)$, $r_2 = (0, 1, 1)$ هما أساس فضاء صفوف A والمتجهات:

$$C'_2=\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix}\ ,\quad C'_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

لذا فإن متجهات أعمدة A هي:

$$C_2=\begin{bmatrix}8\\2\\-1\end{bmatrix}\ ,\quad C_1=\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}$$

والتي تكّون أساس فضاء أعمدة A.

ملاحظة:

لاحظنا في المثال (6) أن متجهات الأساس التي حصلنا عليها لفضاء أعمدة A تتكون من متجهات أعمدة A، لكن متجهات الأساس التي حصلنا عليها لفضاء صفوف A ليست جميعها متجهات صفوف A.

الطريقة الآتية توضح كيفية إيجاد أساس فضاء صفوف المصفوفة A المتكون تماماً من متجهات صفوف A.

مثال (8):

1. نفرض

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 10 & -7 \end{bmatrix}$$

2. نجد منقولة A.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

3. نختزل A^T للحصول على الشكل المدرج الصفي باستخدام عمليات الصف البسيطة وسنحصل على:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. نعين الأعمدة التي تحتوي على الرقم 1 وهو الدليل فنجد أنها العمود الأول والعمود الثالث.

5. عليه فإن متجهات الأعمدة المقابلة في A^T تكّون فضاء أعمدة A^T وهي:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad و \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. نجد المنقولة مرة ثانية فنحصل على متجهات الأساس لفضاء صفوفA وهي:

$$r_3 = (2, 1, -4) \quad , \quad r_1 = (1, -3, 1)$$

تمارين (5-5)

1. أوجد أساس فضاء الصفوف وأساس فضاء الأعمدة لكل مما يأتي:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. هل أن فضاء الصفوف يساوي فضاء الأعمدة للمصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

3. a. أوجد الشكل العام لحل النظام الخطي $AX = 0$ بشكل متجه.

b. أوجد الشكل العام لحل النظام الخطي $AX = B$ بشكل متجه.

إذا كان $x_4 = -3 , x_3 = 4 , x_2 = 2, x_1 = 1$ هو حل للنظام غير المتجانس $AX = B$ و $x_4 = s , x_3 = r , x_2 = r - s , x_1 = -3r + 4s$ هو حل النظام المتجانس $AX = 0$

4. هل أن B تنتمي إلى فضاء أعمدة A، وإذا كانت كذلك اكتب B كتركيب خطي لمتجهات أعمدة A لما يأتي:

a. $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

5. أوجد متجه الحل العام للنظام الخطي $AX = B$. استخدم النتائج التي نحصل عليها لإيجاد متجه الحل العام للنظام الخطي $AX = 0$، إذا علمت أن:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

$$x_1 \qquad + x_3 = -2$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$

6. أوجد أساس الفضاء الصفري للمصفوفات الآتية:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

5-6 رتبة المصفوفات، بعد الفضاء الصفري:

في هذا البند سنركز اهتمامنا على العلاقات بين أبعاد فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة والفضاء الصفري لمصفوفة ما ومنقولاتها للاستفادة منها في الفصول القادمة.

تعريف (5-6-1):

لتكن A مصفوفة ما. البعد المشترك لفضاء الصفوف وفضاء الأعمدة يقال له رتبة A [يكتب بالرمز rank (A)]. أما بعد الفضاء الصفري للمصفوفة A فيسمى صفرية A [ويرمز له nullity (A)].

إذا كانت A مصفوفة و A^T منقولتها فإننا نحصل على ست من فضاءات المتجهات وهي:

1. فضاء صفوف A
2. فضاء أعمدة A
3. الفضاء الصفري إلى A
4. فضاء صفوف A^T.
5. فضاء أعمدة A^T.
6. فضاء A^T الصفري.

وبما أن منقولة المصفوفة A تحول متجهات صفوف A إلى متجهات أعمدتها ومتجهات أعمدتها إلى متجهات صفوفها فإن فضاء صفوف A^T هو نفسه فضاء أعمدة A وفضاء أعمدة A^T هو نفسه فضاء صفوف A.

عليه فإننا سنركز اهتمامنا على الفضاءات الأربعة الآتية فقط:

1. فضاء صفوف A.
2. فضاء A الصفري
3. فضاء صفوف A^T.
4. فضاء A^T الصفري.

ملاحظة:

فضاءات المصفوفة أعلاه تسمى الفضاءات الأساسية. إذا كانت سعة A هي $m \times n$ فإن فضاء صفوف A وفضاء A الصفري هي فضاءات جزئية في R^n. كذلك فضاء صفوف A^T وفضاء A^T الصفري هي فضاءات جزئية في R^m.

مبرهنة (2-6-5):

لتكن A مصفوفة ما، فإن بعد فضاء صفوف A يساوي بعهد فضاء أعمدة A.

البرهان:

نفرض أن الشكل المدرج الصفي المختزل للمصفوفة A هي R فإن من الملاحظة (1) بعد المبرهنة (4-5-5):

بعد فضاء صفوف A = بعد فضاء صفوف R

كذلك:

بعد فضاء أعمدة A = بعد فضاء أعمدة R

ولما كان: بعد فضاء صفوف R = بعد فضاء أعمدة R

إذن: بعد فضاء صفوف A = بعد فضاء أعمدة A.

مثال (1):

أوجد رتبة وتصفير A حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -5\\ 2 & 5 & -1 & -9\\ 2 & 1 & -1 & -11\\ 1 & -3 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

باستخدام عمليات الصف البسيطة سنحصل على (تأكد من ذلك بنفسك) الشكل المدرج الصفي المختزل الآتي:

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

بما أننا حصلنا على ثلاث صفوف غير صفرية، (بمعنى آخر ثلاث أدلة 1) فإن رتبة A تساوي 3.

لإيجاد تصفير A فإننا يجب أن نحصل على بعد فضاء حل النظام الخطي $AX = 0$ وللحصول على هذا الحل فإننا نختزل المصفوفة الممتدة للشكل المدرج الصفي المختزل فنحصل على:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

لذا فالنظام الخطي المقابل لهذه المصفوفة هو:

$$x_1 + 2x_4 = 0$$

$$x_2 - 3x_4 = 0$$

$$x_3 - 2x_4 = 0$$

عليه فالحل هو (تأكد من ذلك)

$x_1 = -2x_4$

$x_2 = 3x_4$

$x_3 = 2x_4$

وبفرض $x_4 = t$ فإن الحل العام للنظام الخطي $AX = 0$ هو:

أي أن:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

لذا فإن المتجه الوحيد في الجانب الأيمن يكون أساساً لفضاء الحلول وعليه

$\text{null}(R) = 1$

مثال (2):

احسب $\text{rank}(A)$ وصفرية A إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

أولاً: نحول A للشكل المدرج الصفي وكما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{4R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة هي بالشكل المدرج الصفي الـتي تحـوي علـى صفـين مسـتقلين خطياً. لذا فإن $\text{rank}(A) = 2$

مبرهنة (5-6-3):

لتكن A مصفوفة ما، عليه:

$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ (أي رتبة A = رتبة A^T)

البرهان:

رتبة A = بعد فضاء صفوف A = بعد فضاء أعمدة A^T = رتبة A^T

مثال (3):

بالعودة للمصفوفة في المثال 2، أي $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

وبوساطة عمليات الصف البسيطة على A^T نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الأخيرة هي بالشكل المدرج الصفي والتي تحتوي على صفين مستقلين خطياً. عليه فإن:

$$\text{rank}(A^T) = 2$$

وهو نفسه $\text{rank}(A)$.

مبرهنة (5-6-4):

إذا احتوت المصفوفة A على n من الأعمدة فإن:

$$\text{rank}(A) + \text{null}(A) = n$$

البرهان:

بما أن النظام الخطي $AX = 0$ له n من المتغيرات وذلك لأن A تحتوي على n من الأعمدة. لذا فإن:

عدد المتغيرات الرئيسية + عدد المتغيرات الحرة = n

لكن عدد المتغيرات الرئيسة هو نفسه عدد الوحدات الرئيسية في الشكل المدرج الصفي المختزل للمصفوفة A وهذا العدد ساوي رتبة A [rank (A)] وكذلك لما كان عدد المتغيرات الحرة يساوي صفرية A [null (A)] لأن صفرية A هي بعد فضاء الحل للنظام $AX = 0$ الذي يساوي عدد المتغيرات الوسيطة في الحل العام ويساوي عدد المتغيرات الحرة.

لذا فإن:

بعد فضاء صفوف (أعمدة) A + بعد الفضاء الصفري للمصفوفة A = n

مثال (4):

لما كان بعد فضاء الصفوف في المصفوفة A في المثال 2 يساوي (3) وكذلك بعد الفضاء الصفري يساوي 1، فإن:

$3 + 1 = 4$ وهو عدد أعمدة A.

أما في المثال 3 فإن بعد فضاء الصفوف هو 2 وبعد الفضاء الصفري هو 1، عليه:

$2 + 1 = 3$ وهو عدد أعمدة A.

مثال (5):

أوجد عدد المتغيرات الوسيطة في حل النظام الخطي $AX = 0$، إذا علمت أن سعة A هي 5×7 وأن رتبة A هي 3 باستخدام مبرهنة (3-6-5):

صفرية A = (رتبة A) − n = 3 − 7 = 4

$$nu_{11}(A) = n - rank(A) = 7 - 3 = 4$$

ملاحظة:

لتكن A مصفوفة سعتها $m \times n$ ورتبتها r. بوساطة مبرهنة (5-6-3) سعة A^T هي $n \times m$ ورتبتها r. وبوساطة مبرهنة (5-6-4) فإننا نحصل على:

صفرية A^T تساوي n - r وصفرية A^T تساوي m - r ويمكن تلخيص ذلك بعمل الجدول الآتي:

الفضاءات الأساسية	بعدها
فضاء صفوف A	r
فضاء أعمدة A	r
فضاء A الصفري	n - r
فضاء A^T الصفري	m - r

إذا كانت A مصفوفة سعتها $m \times n$ فإن متجهات الصفوف تقع في R^n ومتجهات الأعمدة تقع في R^m. من هذا نستنتج أن فضاء صفوف A هو على الأكثر n من الأبعاد وفضاء الأعمدة هو على الأكثر m من الأبعاد. لكن بعد فضاء صفوف A يساوي بعد فضاء أعمدتها. عليه:

إذا كان $m \neq n$ فإن $\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$

مثال (6):

نفرض سعة A هي 5×7 لذا فإن رتبة A على الأكثر 5. نستنتج من ذلك أن متجهات الصفوف غير مستقلة خطياً (مرتبطة). كذلك إذا كانت السعة 6×3 فإن رتبة A هي على الأكثر 3 وعليه فإن متجهات الأعمدة غير مستقلة خطياً.

مبرهنة (5-6-5):

ليكن $AX = B$ نظاماً خطياً يحتوي على m من المعادلات و n من المتغيرات، فإن ما يأتي يكون متكافئاً.

1. $AX = B$ له حل واحد على الأقل (قويم).

2. B داخل فضاء أعمدة A.

3. لتكن A مصفوفة معاملات، فإن:

رتبة A = رتبة المصفوفة الممتدة [A:B].

البرهان:

1 ⇐ 2 هذا الفرع مبرهن لاحظ مبرهنة (3-5-5).

2 ⇐ 3 بالتعريف، فضاء أعمدة مصفوفة ما هو فضاء متولد من متجهات أعمدتها. لذا فإن فضاءات أعمدة A, [A: B] متولدة من مجموعتي المتجهات $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ و $\{c_1, c_2, \dots, c_n, B\}$ على التوالي.

إذا كانت B في أعمدة A فإن أي متجه في المجموعة $\{c_1, c_2, \dots, c_n, B\}$ هو تركيب خطي للمتجهات $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ وبالعكس. بوساطة مبرهنة (6-2-5):

نوجد مجموعة جزئية من متجهات أعمدة A التي تكون أساس فضاء أعمدة A. نفرض أن متجهات العمود هذه هي:

$e'_1, e'_2, \dots, e'_s$، متجهات الأساس هذه تنتمي إلى فضاء الأعمدة ذي البعد s للمصفوفة {A:B} وهذا يعني بأنها تكون أساس فضاء أعمدة المصفوفة [A:B] [لاحظ مبرهنة (9-4-5)]. هذا يعني أن B هي تركيب خطي من $e'_1, e'_2, \dots, e'_s$ وعليه فإن B تقع في فضاء أعمدة A.

مبرهنة (6-6-5):

ليكن $AX = B$ نظام خطي يحوي m من المعادلات و n من المتغيرات (المجاهيل) فإن العبارات الآتية متكافئة:

1. $AX = B$ قويمة (تحتوي على الأقل حل واحد) لكل مصفوفة B التي سعتها $m \times 1$.
2. متجهات أعمدة A تنشأ R^m.
3. $\text{rank}(A) = m$ (رتبة A).

البرهان:

$2 \Leftarrow 1$: من المعادلة 2 بند (5-5) النظام $AX = B$ يمكن التعبير عنه بالصورة:

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n = B$$

نستنتج من ذلك أنه $AX = B$ قويم لكل B إذا وفقط إذا كل مصفوفة B يمكن التعبير عنها كتركيب خطي لمتجهات الأعمدة $e_1, e_2, \ldots, e_n$، بمعنى آخر، إذا وفقط إذا كانت متجهات العمود تنشأ R^m.

$3 \Leftarrow 1$: لما كان $AX = B$ قويماً لكل B وكذلك من 1 و 2 من مبرهنة (5-6-5) نستنتج أن أي متجه B في R^m يقع في فضاء أعمدة A، أي ان فضاء أعمدة A يقع في R^m. لهذا فإن رتبة A تساوي بعد R^m، أي يساوي m.

$1 \Leftarrow 3$: بما أن رتبة A تساوي m، فإن فضاء أعمدة A هو فضاء جزئي في R^m بعدة يساوي m وبوساطة مبرهنة (5-4-10) فإنه يساوي كل R^m. من المبرهنة أعلاه ينتج أن $Ax = B$ قويماً لكل متجه B في R وذلك لأن أي متجه مثل B ينتمي إلى فضاء أعمدة A.

ملاحظة:

إذا كان النظام الخطي $AX= B$ يتكون من m من المعادلات وn من المتغيرات بحيث $m<n$ فإن متجهات أعمدة A لا تنشأ R^m. بواسطة المبرهنة أعلاه ينتج أن بالنسبة للمصفوفة A ذات السعة $m\times n$ حيث $m>n$ فإن النظام الخطي $AX=B$ ليس قويماً لجميع احتمالات B . على سبيل المثال النظام.

$$x_1 - 2x_2 = b_1$$

$$x - x_2 = b_2$$

$$x_1 + x_2 = b_3$$

$$x_1 + 2x_2 = b_4$$

$$x_1 + 3x_2 = b_5$$

ليس قوياً $(m>n)$ لكل قيم b_i (1.2.3.4)، المحتملة. والشروط الأساسية لكي يكون النظام قوياً هي بحل النظام بطريقة حذف قاوس - جوردن للحصول على الشكل المدرج الصفي للمصفوفة الممتد الآتي:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 2b_2 + 3b_1 \\ 0 & 0 & b_5 - 5b_2 + 4b_1 \end{matrix}$$

وهذا الشكل يكون قوياً إذا وفقط إذا حققت b_2,b_4,b_3,b_2,b_1 العلاقات الآتية:

$$2b_1 - 3b_2 + b_3 = 0$$

$$3b_1 - 4b_2 + b_4 = 0$$

$$4b_1 - 5b_2 + b_5 = 0$$

وبحل هذا النظام ينتج:

$$b_1 = 5r - 4s$$

$$b_2 = 4r - 3s$$

$$b_3 = 2r - s$$

$$b_4 = r$$

$$b_5 = s$$

حيث r و s ثوابد لا على التعين.

مبرهنة (7-6-5):

إذا كان النظام الخطي $AX = B$ قوياً ومتكوناً من m من المعادلات و n من المتغيرات وكذلك رتبة A هي r فإن الحل العام للنظام يحتوي على $n - r$ وسيطاً.

البرهان:

من المبرهنة (4-5-5) العلاقة 3 الكميات الثابتة c_1, c_2 , ... c_n, هي وسائط الحلول العامة $AX = B$ و $AX = 0$ لذا فإن هذه الأنظمة تحتوي على نفس العدد من المتغيرات الوسيطة في حلولها العامة، إضافة لذلك ومن برهان مبرهنة (4-6-5) فإن عدد المتغيرات الوسطية هو null (A). من هذه الحقائق وبوساطة مبرهنة (4-6-5) نحصل على البرهان.

مثال (7):

لتكن A مصفوفة سعتها 7 × 4 ورتبتها 3. وإذا كان النظام الخطي قويماً فإن الحل العام للنظام يحتوي على 4 = 3 - 7 وسيطاً.

مبرهنة (8-6-5):

لتكن A مصفوفة سعتها m × n فإن ما يأتي يكون متكافئاً.

1. النظام الخطي $AX = 0$ يحتوي على حل وحيد هو الحل الواضح.
2. متجهات أعمدة A تكون مستقلة خطياً.
3. النظام الخطي $AX = B$ يحتوي على الأكثر حلاً واحداً لكل B ذات السعة m × 1.

البرهان:

1 ⇐ 2 نفرض أن c_1, c_2 , ... c_n, هي متجهات أعمدة A، عليه فإن النظام الخطي $AX = 0$ يمكن كتابته بالشكل:

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n = 0$$

إذا كانت $c_1, x_2, \ldots, c_n$, مستقلة خطياً. فإن المعادلة أعلاه تتحقق فقط عندما $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$، وهذا يعني أن الحل الواضح هو الحل الوحيد للنظام $AX = 0$ وبالعكس، إذا كان الحل الواضح هو الحل الوحيد للنظام $AX = 0$ فإن المعادلة أعلاه تتحقق فقط عندما $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ وهذا يعني أن c_1, c_2 , ... c_n, مستقلة خطياً.

$3 \Leftarrow 2$: يترك كتمرين.

$3 \Leftarrow 1$: نفرض ان الحل الواضح هو الحل الوحيد للنظام $AX = 0$ فإن النظام $AX = B$ أما أن يكون قويماً أو لا يكون، فإذا لم يكن قويماً فسوف لا يكون للنظام حلاً. أما إذا كان قويماً، نفرض أن x هو حل ما لا على التعيين. من خلال مبرهنة (4-5-5) العلاقة (3) وحقيقة أن الحل الواضح للنظام $AX = 0$ هو الحل الوحيد نستطيع الاستنتاج بأن الحل العام للنظام $AX = B$ هو:

$$x' = 0 + x'$$

لذا فإن x' هو الحل الوحيد للنظام $AX = B$

$1 \Rightarrow 3$: نفرض أن النظام $AX = B$ له على الأكثر حل واحد، لكل B سعة $m \times 1$. لذا فإن $AX = 0$ له على الأكثر حل واحد هو الحل الواضح.

مثال (8):

إذا كانت المصفوفة A ذات سعة 7×5 فإن النظام $AX = B$ يكون قويماً لكل B ذات السعة 7×1 وأن الحل العام يحتوي على $7 - r$ من المتغيرات الوسيطة حيث r رتبة A.

ملاحظة:

خلاصة القول نستطيع الآن جمع معظم النتائج المهمة التي حصلنا عليها سابقاً ولنهاية بند (5-6):

لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$ ونفرض أنها مضروبة التحويلة $T_A\colon R^n \to R^n$. فإن النتائج الآتية تكون متكافئة:

1. A قابلة للانعكاس.
2. الحل الوحيد للنظام الخطي $AX = 0$ هو الحل الصفري.
3. الصيغة المدرجة الصفية المختزلة للمصفوفة A هي I_n.
4. A هي عبارة عن حاصل ضرب مصفوفات بسيطة.

5. النظام الخطي $AX = B$ قوياً لكل B مصفوفة سعتها $n \times 1$.
6. يكون للنظام الخطي $AX = B$ حلاً وحيداً لكل B.
7. $|A| \neq 0$.
8. مدى T_A هو R^n.
9. التحويلة T_A متباينة.
10. متجهات أعمدة A مستقلة خطياً.
11. متجهات صفوف A مستقلة خطياً.
12. متجهات أعمدة A تنشأ R^n.
13. متجهات صفوف A تنشأ R^n.
14. متجهات أعمدة A أساس R^n.
15. متجهات صفوف A أساس R^n.
16. رتبة A تساوي n.
17. صفرية A تساوي صفر.

البرهان:

الصيغ من 1 ولغاية 9 متكافئة حسب مبرهنة (6-4-3):

$10 \Rightarrow 2$: بما أن الحل الوحيد للنظام الخطي $AX = 0$ هو الصفري فإن متجهات أعمدة A مستقلة خطياً. راجع مبرهنة (8-6-5).

الصيغ من 2 ولغاية 15 متكافئة راجع مبرهنة (8-4-5) وحقيقة أن R^n فضاء متجهات ذي البعد n.

$16 \Rightarrow 15$: لما كانت متجهات صفوف A التي عددها n تكون أساس R^n فإن بعد فضاء صفوف A يساوي n وإن رتبة المصفوفة A هي n.

$17 \Rightarrow 16$: أنظر مبرهنة (4-6-5).

$2 \Leftarrow 17$ نفرض صفرية A تساوي صفر عليه فإن بعد فضاء حل النظام $AX = 0$ يساوي صفر أي أنه يحتوي على المتجه الصفري فقط. نستنتج من ذلك أن حل النظام $AX = 0$ هو الحل الصفري.

تمارين (5-6)

1. أثبت أن رتبة A = رتبة A^T حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

2. أوجد رتبة وصفرية المصفوفات الآتية ثم حقق مبرهنة (5-6-4)

$$\text{a.} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{b.} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{c.} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

3. في كل من مصفوفات تمرين 2، احسب عدد المتغيرات الوسيطة في حل النظام $AX = 0$.

4. برهن أن رتبة A = رتبة A^T لكل A حيث A مصفوفة.

5. في الجدول أدناه بين فيما إذا كان النظام الخطي $AX = B$ قوياً وإذا كان كذلك احسب عدد المتغيرات الوسيطة في الحل العام.

	a	b	c	d	e	f	g
سعة A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
رتبة A	3	2	1	2	2	0	2
رتبة [A:B]	3	3	1	2	3	0	2

6. بين أن A و kA لهما نفس الرتبة، حيث $k \neq 0$.

7. ما هي شروط الثوابت b_1 لكي يكون النظام الخطي الآتي قويماً.

$$x_1 - 2x_2 = b_1$$

$$x_1 - x_2 = b_2$$

$$x_1 + x_2 = b_3$$

$$x_1 - 3x_2 = b_4$$

$$X_1 + 6X_2 = b_5$$

الفصل السادس



فضاء الضرب الداخلي

الفصل السادس

فضاء الضرب الداخلي

سبق وان درسنا في الفصول السابقة مفاهيم كثيرة كطول المتجه والزاوية المحصورة بين المتجهات في R^n باستخدام ضرب المتجهات النقطي. في هذا الفصل سندرس هذه المفاهيم في فضاء المتجهات وبشكل أكثر عمومية.

6-1 الضرب الداخلي

تعريف (1-1-6):

الضرب الداخلي على V هو دالة ترفق العدد الحقيقي $<u, v>$ مع زوج من المتجهات v, u في V بطريقة بحيث تتحقق الشروط الآتية:

1. $<u, v> = <v, u>$ لكل v, u في V.
2. $<u + v, w> = (u, w) + (v, w)$ لكل u و v و w في V.
3. $<ku, v> = k <u, v)$ لكل v, u في V و k عدد ثابت.
4. $<v, v> \geq 0$ و $<v, v> = 0$ إذا وفقط إذا $v = 0$

ملاحظة:

(1): فضاء المتجهات الحقيقي مع الضرب الداخلي يسمى فضاء الضرب الداخلي الحقيقي.

(2) إذا كانت $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ و $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ متجهات في R^n فإن الصيغة:

$$<u, v> = u_1.v_1 + u_2.v_2 + \dots + u_n . v_n \quad \dots\dots (1)$$

تعرف الضرب الداخلي على R^n.

من السهولة إثبات أن الشروط الأربعة الواردة في التعريف (1-1-5) متحققة.

تعريف (2-1-6):

لتكن V فضاء الضرب الداخلي فإن طول المتجه u في V يعرف بالشكل:

$$||u|| = <u\ u) >^{\frac{1}{2}}$$

أما المسافة بين المتجهين u,v ، تكتب d (v.u)، فتعرف

$$d(u, v) = ||u-v||$$
$$= <u - u , u - v) >^{\frac{1}{2}}$$
$$= [(u - v).(u - v)]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + ... + (u_n - v_n)^2}$$

لتكن $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ و $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ متجهات في R^n، نفرض أن A مصفوفة سعتها $n \times n$ وقابلة للانعكاس. فإذا كان u.v هو ضرب داخلي إقليدي على R^n فإن الصيغة:

$$<u, v> = Au\ .\ Av \quad .... (2)$$

تعرف الضرب الداخلي المسمى الضرب الداخلي على R^n المتولـد بواسـطة A. يمكن كتابة الصيغة أعلاه بالشكل:

$$<u, v> = (Av)^T Au$$
$$<u, v> = V^T A^T Au \quad .... (3)$$

وكحالة خاصة عندما $A = I_n$ فإننا سنحصل على:

$$<u, v> = Iu\ .\ Iv = u.v$$

مثال (1):

لتكن $v = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ و $u = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ فإن:

$<u, v> = a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1 + d_2d_1$

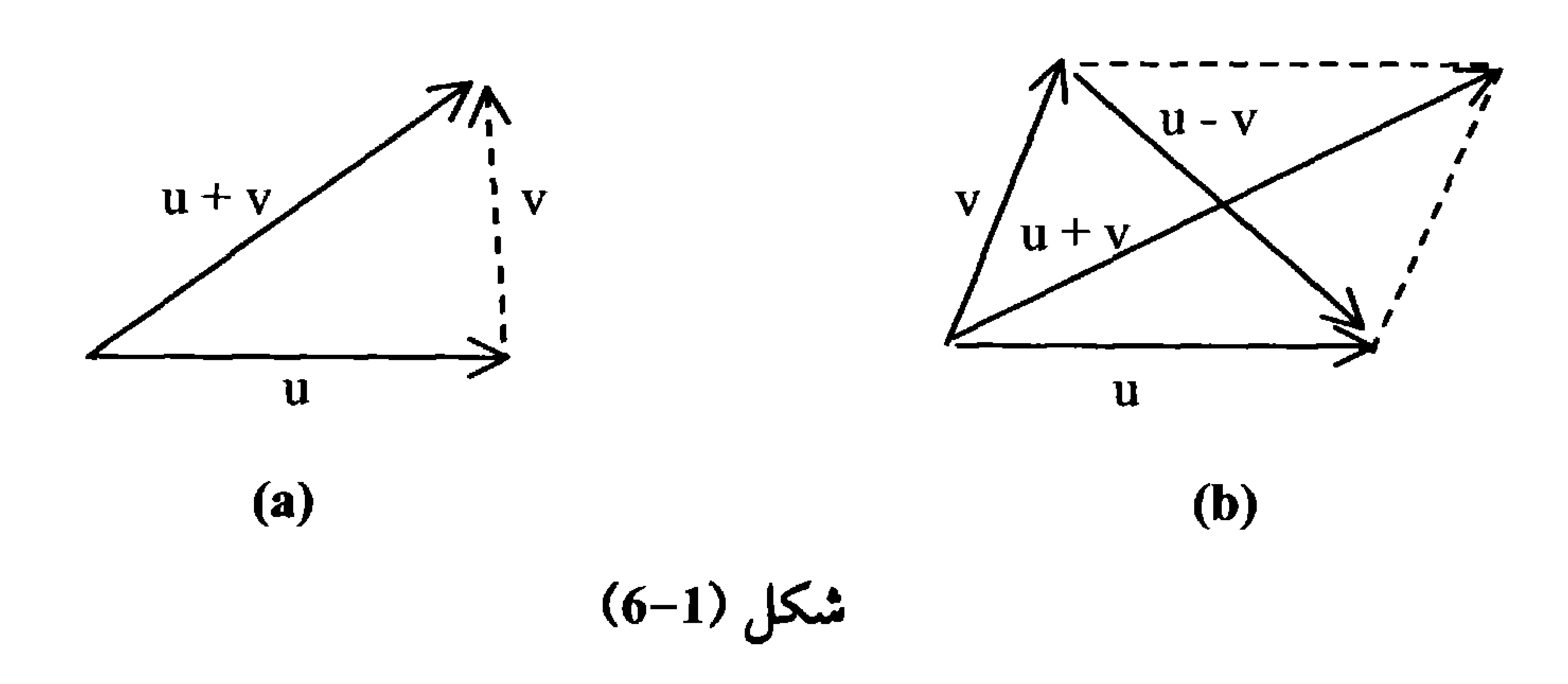
فلو فرضنا أن $v = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ و $u = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$، فإن:

$<u, v> = (0 \times 2) + (-1)(3) + 2(4) + 3(1) = 8$

$\|V\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} = < v, v)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{4 - 9 + 16 + 1} = \sqrt{30}$

من المعروف في الهندسة الإقليدية أن مجموع طولي ضلعين في مثلث أصغر أو تساوي طول الضلع الثالث كما وأن مجموع مربعات أقطار متوازي الأضلاع يساوي مجموع مربعات الجوانب الأربعة (لاحظ الشكل (6-1)).



شكل (6-1)

أما كرة الوحدة في هذا الفضاء فتعرف بأنها مجموعة جميع المصفوفات سعة 2×2 والتي عناصرها تحقق المعادلة $\|v\| = 1$، أي

$v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 = 1$

مثال (2):

نفرض $P_1 = a_0 + a_{1x}\, x^2$ و $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$ متجهات في P_2 فإن:

$<p,q> = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$

تمثل تعريف الضرب الداخلي على P_2 (برهن ذلك)

أما طول متعددة الحدود نسبة لهذا الضرب الداخلي فيعرف

$$\|p\| = <p.p>^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}$$

كره الوحدة في هذا الفضاء تتكون من جميع متعددات الحدود P في P_2 التي تحقق $\|p\| = 1$ أو $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1$

مثال (3):

لتكن $f(x)$, $g(x)$ دوال مستمرة على الفترة [a, b] فإن <f, g> المعرفة:

$$< f(x), g(x) > = \int_a^b f(x)\, g(x)$$

يمثل ضرب داخلي على [a, b] .

لكي نبرهن أن $< f(x), g(x) >$ ضرب داخلي يجب أن تحقق شروط التعريف (6-1-1):

1. $< f(x), g(x) > = \int_a^b f(x)g(x)dx$

$$= \int_a^b g(x)f(x)dx = < g(x), f(x) >$$

2. $< f(x) + g(x), h(x) > = \int_a^b f(x)+g(x)h(x)$

$$= \int_a^b f(x)h(x) + \int_a^b g(x)h(x)$$

$$= < f(x), h(x) > + < g(x), h(x) >$$

3. $< k f(x), g(x) > = \int_a^b k f(x)g(x)dx$

$$= k \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$= k < f(x), g(x) >$$

4- إذا كانت $f(x)$ دالة على [a, b] فإن $f^2(x) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$

لذا:

$$< f(x), f(x) > = \int_a^b f^2(x)\, dx = 0$$

ولما كانت $f^2(x) \geq 0$، $f(x)$ مستمرة على $[a, b]$ فإن:

$\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ إذا وفقط إذا $f(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$

أذن $<f(x), f(x)> = \int_a^b f(x)\,dx = 0$ إذا وفقط إذا $f(x) = 0$

أما طول $f(x)$ نسبة لهذا الضرب الداخل فهو:

$$\|f(x)\| = <f, f>^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx} \quad \text{...} (4)$$

كرة الوحدة هي كل $f(x)$ التي تحقق $\|f(x)\| = 0$ أي

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 1$$

لاحظ ان طول المنحنى $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$ يختلف عن طول المتجه $f(x)$ على $[a, b]$ حيث ان طول المنحنى هو

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f(x))^2} \quad \text{........................} (5)$$

لذا فإن الصيغة (4) تختلف عن الصيغة (5).

مبرهنة (3-1-6):

(خواص فضاء الضرب الداخلي الحقيقي).

لتكن w, u, v ثلاث متجهات في فضاء الضرب الداخلي الحقيقي و k كمية ثابتة، فإن

1. $<v, 0> = <0, v> = 0$
2. $<v, u + w> = <v, u> + <u, w>$.
3. $k <v, u> = <v, k u>$
4. $<v - u, w> = <v, u> - <u, w>$.
5. $<v, u - w> = <v, u> - <u, w>$

البرهان:

نبرهن الحالة الثانية ونترك بقية الحالات كتمارين.

$$<v, u + w> = <u + w, v> = <u, v) + <w, v> = (v, u) + <u, w>$$

مثال (4):

أوجد $<v-3u, 2v + 5u>$

$$<v - 3u, 2v + 5u> = <v, 2v + 5u> - <3u, 2v + 5u>$$

$$= <v, 2v> + <v, 5u> - <3u, 2v> - <3u, 5u>$$

$$= 2\ ||v||^2 + 5\ <v, u> - 6\ <u, v> - 15\ ||u||^2$$

$$= 2\ ||v||^2 - <v, u> - 15\ ||u||^2$$

ملاحظة:

الخواص الخمسة الواردة في مبرهنة (3-1-5) تكون صحيحة للضرب الداخلي في R^n المتولد بواسطة أي مصفوفة A. فمثلاً

$$<v, u+w> = (u + w)^T\ A^TAv$$

$$= (u^T + w^T)\ A^TAv \qquad \text{(خواص منقولة المصفوفة)}$$

$$= u^TA^TAv + w^TA^TAv \qquad \text{(خواص ضرب المصفوفات)}$$

$$= <v, u> + <v, w>$$

❖ **تمرين:** حقق صحة الخواص الباقية باستخدام نفس الأسلوب.

تمارين (6-1)

1. إذا كانت $<v, u>$ ضرب داخلي إقليــدي علــى R^n، $u = (-3, 2)$, $v = (1, -2)$ و $w = (-4, 5)$ ثلاث متجهات و $k = -2$، احسب

   a. $<kv, u> = k <v, u> = <v, ku>$

   b. $<v + u, w> = <v, w> + <u, w>$

   c. $<v, u + w> = <v, u> + <u, w>$

2. أوجد $<v, u>$ باستخدام الضرب الداخلي المعرف على المصفوفات حيث

   a. $v = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   b. $v = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. لتكن $p = 2 - 3x + x^2$ و $q = 3 - 2x^2$ احســب $<p, q>$ باســتخدام الضــرب الداخلي لمتعددات الحدود.

4. استخدم العلاقة (1) لبرهان أن:

   $<v, u> = g\, v_1u_1 + 4v_2u_2$

   هو ضرب داخلي على R^2 متولد من $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. إذا كانت $<v, u> = 3v_1u_1 + 5v_2u_2$ ضرب داخلي على R^2 حيث $u = (v_2, u_2)$, $v = (v_1, u_1)$ أوجد A التي تولد الصيغة أعلاه.

6. أثبت أن $<0, v> = <v, 0> = 0$ لكل $v \in R^2$.

7. أوجد:

a. $\langle 5v_1 + 8v_2 , u_1 - 7u_2)$

b. $\|3v - 2u\|^2$

8. برهن أن $\langle v, u \rangle = x_1y_1 \; x_2y_2$ ليست ضرب داخلي على R^2 حيث $v = (x_1, x_2)$ و $u = (y_1, y_2)$.

9. لتكن V فضاء متجهات معرف عليها الضرب النقطي $\int_0^1 f(t)g(t)dt$ حيث

$f(t) = t + 2$ و $g(t) = 3t - 2$

أوجد:

$\langle f(t) , g(t) \rangle$ و $\| f(t) \|$

6-2 الزوايا والتعامد في فضاء الضرب الداخلي:

ستتطرق في هذا البند إلى تعريف الزاوية بين متجهين في فضاء الضرب الداخلي وتوظيف ذلك للحصول على بعض العلاقات الأساسية بين متجهات فضاء الضرب الداخلي كالعلاقات الهندسية بين الفضاء الصفري وفضاء الأعمدة لمصفوفة ما.

تعلمنا من الفصول السابقة أنه إذا كانت v وu متجهات في R^2 و θ هي الزاوية بينهما فإن:

$$v.u = \|v\| \, \|u\| \cos \theta \quad \text{.......} \quad (1)$$

أو

$$\cos \theta = \frac{v.u}{\| v \| \, \| u \|} \quad \text{.......} \quad (2)$$

مبرهنة (6-2-1)

(متباينة كوجي - شفارتز): إذا كانت u, v متجهات في فضاء الضرب الداخلي الحقيقي فإن:

$$| \langle v, u \rangle | \leq \| v \| \, \| u \| \quad \text{.......} \quad (3)$$

البرهان:

إذا كانت $v = 0$ فإن $\langle v, u \rangle = \langle v, v \rangle = 0$ عليه فإن طرفي العلاقة (1) متساويان.

نفرض $v \neq 0$ و $a = \langle v, v \rangle$ و $b = 2 \langle v, u \rangle$ و $c = \langle u, u \rangle$ و t عدد حقيقي فإن:

$$0 \leq \langle (tv + u) , (tv + u) \rangle = \langle v, v \rangle t^2 + 2 \langle v, u \rangle t + \langle u, u \rangle$$
$$= at^2 + b t + c$$

من المتباينة يتضح أن متعددة الحدود $at^2 + bt + c$ أما لا تحتوي على جذور حقيقية أو جذر حقيقي متكرر. لذا فإن مميزها يحقق المتباينة

$b^2 - 4ac \leq 0$

وبالتعويض نحصل على:

$4 <v, u>^2 - 4 <v, v> <u, u> \leq 0$

أو:

$<v, u>^2 \leq < v, u> <u, u>$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين (لاحظ أن $<u, u>$, $<v, v>$ كميات موجبة) سنحصل على:

$| <v, u> | \leq <v, v>^{\frac{1}{2}} <u, v>^{\frac{1}{2}}$

أي:

$| <v, u> | \leq \| v \| \| u \|$ .... (4)

وخلاصة القول نستطيع كتابة متباينة كوجي - شفارتز بصيغ الخيارين الآتيين:

أما:

$<v, u>^2 \leq <v, v> <u, u>$ .... (5)

أو:

$<v, u>^2 \leq \| v \|^2 \| u \|^2$ .... (6)

حيث أن الصيغة الأولى حصلنا عليها بموجب مبرهنة (1-2-6) والصيغة الثانية حصلنا عليها من الصيغة الأولى باستخدام حقيقة أن $\| v \|^2 = (v, v)$ و $\|u \|= <u, u>$

مثال (1):

لاحظ أن متباينة كوجي - شفارتز الواردة في مبرهنة (7-1-4) يمكن اعتبارها كحالة خاصة من مبرهنة (1-2-6) وذلك بأخذ $<v, u>$ كضرب داخلي إقليدي v.u.

خواص الطول والمسافة في فضاء الضرب الداخلي:

إذا كانت w, u, v متجهات في فضاء الضرب الداخلي V و k كمية ثابتة فإن:

1. $\| v \| \geq 0$

2. $\| v \| = 0$ إذا وفقط إذا $v = 0$

3. $\| kv \| = |k| \|v\|$

4. $\| v + u \| \leq \| v \| + \| u \|$

5. $d(v, u) \geq 0$

6. $d(v, u) = 0$ إذا وفقط إذا $v = u$

7. $d(v, u) = d(u, v)$

8. $d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u)$

من السهولة إثبات صحة الخواص أعلاه لذا نترك براهينها كتمرين، وللتوضيح سنبرهن الخاصية رقم 4.

$$\begin{aligned}
\| v + u \|^2 &= \langle v + u, v + u \rangle \\
&= \langle v, v \rangle + 2 \langle v, u \rangle + \langle u, u \rangle \\
&\leq \langle v, v \rangle + 2 \, | \langle v, u \rangle | + \langle u, u \rangle \\
&\leq \langle v, v \rangle + 2 \| v \| \| u \| + \langle u, u \rangle \\
&= \| v \|^2 + 2 \| v \| \| u \| + | u \|^2 \\
&= (\| v \| + \| u \|)^2
\end{aligned}$$

أي:

$\| v + u \| \| v \| + \| u \|$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

◆ **تمرين:** أذكر أسباب الخطوات الواردة في البرهان أعلاه؟.

ملاحظة:

يتبين من خلال الخواص الثمان أن خواص المتجهات في فضاء إقليدس النوني تبقى متحققة في فضاء الضرب الداخلي.

الزاوية بين المتجهات في فضاء الضرب الداخلي:

من العلاقة (4) لدينا:

$$<v, u>^2 \leq \| v \|^2 \| u \|^2$$

وبقسمة طرفي المتباينة أعلاه على $\| v \|^2 \| u \|^2$ نحصل على:

$$\left[\frac{< v,u >}{\| v \|\| u \|}\right]^2 \leq 1$$

بمعنى آخر:

$$-1 \leq \frac{< v,u >}{\| v \|\| u \|} \leq 1 \quad \text{...} (5)$$

وعندما تأخذ θ القيم من 0 إلى π في العلاقة (5) سنحصل على:

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{حيث} \quad \cos\theta = \frac{< v,u >}{\| v \| \, \| u \|} \quad \text{...} (7)$$

مثال (2):

أوجد الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $v = (2,,1, 5)$ و $u = (1, -3, 2)$ في R^2

الحل:

$$<v, u> = 2 - 3 + 10 = 9$$

$$\| v \|^2 = 4 + 1 + 25 = 30$$

$$\| u \|^2 = 1 + 9 + 4 = 14$$

وبالتعويض في (7):

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{30}} = \frac{9}{\sqrt{420}}$$

تعريف (6-2-2):

يقال للمتجهات v و u في فضاء الضرب الداخلي بأنها متعامدة إذا تحقق الشرط الآتي:

$$<v, u> = 0$$

مثال (3):

بين أن $v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ متعامدة.

بما أن

$$<v, u> = (1)(0) + (0)(3) + (1)(0) + (0)(1) = 0$$

عليه فإن u, v متعامدان.

مثال (4):

لتكن $P = x$ و $q = x^2$ متعددتي حدود في P_2 المعرف عليها الضرب الداخلي.

$$<p, q> = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

$$\| p \| = <p, p>^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-1}^{1} xx\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_{-1}^{1} x^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\| q \| = <q, q>^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-1}^{1} x^2 x^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$<p,q> = \int_{-1}^{1} x x^2 dx = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

لذا فإن p و q متعامدتان نسبة للضرب الداخلي.

مبرهنة (6-2-3):

(مبرهنة فيثاغورس): إذا كانت u, v متجهات متعامدة في فضاء الضرب الداخلي، فإن:

$$\| v + u \|^2 = \| v \|^2 + \| u \|^2$$

البرهان:

$$\| v + u \|^2 = < v + u , v + u >$$

$$= < \| v \|^2 + 2 <v, u> + \| u \|^2$$

بما أن u, v متجهات متعامدان فإن $<v, u> = 0$ عليه:

$$\| v + u \|^2 = \| v \|^2 + \| u \|^2$$

مثال (5):

لتكن q, p كما في المثال (4)، فإن:

$$\| p + q \|^2 = \| p \|^2 + \| q \|^2$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

يمكن حل المثال (5) بطريقة أخرى باستخدام تعريف التكامل كالآتي:

$$\| p + q \|^2 = < p + q , p + q > = \int_{-1}^{1} (x + x^2)(x + x^2)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2\, dx + 2 \int_{-1}^{1} x^3\, dx + \int_{-1}^{1} x^4\, dx$$

$$= \frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً.

تعريف (6-2-4):

لتكن U فضاء جزئي من فضاء الضرب الداخلي V. المتجه v في V يقال له عمود على U إذا كان عمودياً على كل متجه في U. مجموعة جميع المتجهات في V العمودية على U يقال لها المتممة العمودية للفضاء الجزئي U ويرمز لها بالرمز $U^{\perp}$.

مبرهنة (6-2-5):

إذا كانت U فضاء جزئي في فضاء الضرب الداخليV، فإن:

1. $U^{\perp}$ فضاء جزئي في V.
2. المتجه الوحيد المشترك بين U , V هو المتجه الصفري.
3. المتمم العمود على U هو U [أي أن $(U^1)^1 = U$].

البرهان:

(1) نفرض u, v متجهين في w^1 و k كمية ثابتة، وليكن w في W، عليه فإن
$<u, w> = 0 , <v, w> = 0$

إذن:

$$<v + u, w> = <v, w> + <u, w> = 0$$

و:

$$<kv, w> = k <v, w> = k0 = 0$$

لذا:

$$kv \in W^1 \quad , v + u \in W$$

(2) تمرين للطالب.

(3) البرهان غير مطلوب.

مبرهنة (6-2-6):

لتكن A مصفوفة سعتها $m \times n$ فإن:

1. الفضاء الصفري وفضاء صفوف A هما متممان متعامدة في R^2 نسبة للضرب الداخلي الإقليدي.
2. الفضاء الصفري للمصفوفة A^T وفضاء أعمدة A هما متممات متعامدة في R^m نسبة للضرب الداخلي الإقليدي.

البرهان:

1. المطلوب برهانة هو إذا كان v متجه ما عمود على أي متجه في فضاء صفوف A فإن $Av = 0$ وبالعكس $Av = 0$ فإن V متعامد مع أي متجه في فضاء صفوف A لأن ذلك يعطينا أن المتممات المتعامدة لفضاء صفوف A هي الفضاء الصفري للمصفوفة A.

إذن نفرض أن v متعامد مع أي متجه في فضاء صفوف A. على وجه الخصوص نفرض v متعامد مع متجهات صفوف A، لنسميها $r_1, r_2 \ldots , r_n$.

$$r_1.v = r_2.v = \ldots r_n.v = 0$$

إذن:

عليه فإن النظام الخطي $Ax = 0$ يمكن كتابته بالشكل:

$$Ar = \begin{bmatrix} r_1 \cdot v \\ r_2 \cdot v \\ \vdots \\ r_n \cdot v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots (9)$$

لهذا فإن v هو حل لهذا النظام، ومن ذلك نستنتج أن هذا الحل يقع في فضاء A الصفري.

بالعكس: نفرض أن V ينتمي لفضاء A الصفري بحيث $Av = 0$، لذا فإن:

$$r_1.v = r_2.v = \ldots = r_n.v = 0$$

ولكن إذا كان r أي متجه في فضاء صفوف A فإن r يكتب:

$$r = c_1r_1 + c_2r_2 + \ldots + c_nr_n$$

لهذا:

$$r.v = (r_1c_1 + r_2c_2 + ... + c_nc_n) . v$$
$$= c_1 (r_1.v) + c_2 (r_2.v) + ... + c_n (r_n.v)$$
$$= 0 + 0 + ... + 0 = 0$$

إذن v يتعامد مع كل متجه من متجهات فضاء صفوف A.

2. باستخدام برهان الجزء الأول نبرهن الجزء الثاني من خلال كون فضــاء أعمـدة A هو فضاء صفوف A^T.

مثال (6):

أوجد المتمم العمودي على الفضاء الجزئي U في R^4 المتولد من :

$v_1 = (1, 2, 2, 1)$ ،$v_2 = (3, 4, 2, 3)$ ،$v_3 = (0, 1, 3, 1)$

ولبرهان ذلك نجد الفضاء الصفري للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

باختزال A نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(تحقق من ذلك).

لذا فإن الفضاء الصفري للمصفوفة A، الذي هو المتمــم العمــودي إلى U، هــو مجموعة المتجهات:

$$\{ (-5k, 4k, -2k , k) \}$$

عليه فإن $\{(-5, 4, -2, 1)\}$ هي أساس U^1

❖ تمرين: لماذا المتمم العمودي على U هو مجموعة المتجهات {(1 ,2- ,4 ,5-)}.

ملاحظة:

بإضافة الخواص الآتية:

1. المتمم العمودي لفضاء A الصفري هو R^n.

2. المتمم العمودي لفضاء صفوف A هو {0}.

للخواص الواردة في الملاحظة نهاية بند (6-5) سنحصل على تسع عشـرة مـن الخواص المتكافئة.

تمارين (6-2)

1. برهن أن $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$.

2. أوجد $\langle 5u_1 + 8u_2, v_1 - 7v_2\rangle$

3. إذا كانت $w = (4, 2, -3)$, $u = (1, 2, 4)$, $v = (2, -3. 5)$ أوجد:

a. $\langle v + u, w\rangle$ b. $\| u \|$ c. $\| v + u \|$ d. $(u+ v) . w$

4. برهن أن: $\langle u, v\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ ضرب داخلي في R^2 حيث $v = (x_1, x_2)$ و $u = (y_1, y_2)$.

5. برهن أن $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ليس ضرب داخلي حيث $u = (x_1, x_2, x_3)$ و $v = (y_1, y_2, y_3)$.

6. لتكن $v = (1, 2, 3, 4)$ و $u = (5, 5\ 8, 8)$ و $w = (4, -3, 2, -1)$ أوجد:

a. $d (u, v)$.

b. $d (w, w)$.

7. ليكن v فضاء متجهات متعددات حدود معرف عليها بضرب داخلي $\int_0^1 f(x)\, g(x)$ حيث $f (x) = x + 1$ و $g (x) = 3x - 2$ و $h (x) = x^3 - 2x - 3$ أوجد:

a. $\langle f, g\rangle$ b. $\langle f, h\rangle$ c. $\langle g, g\rangle$ d. $d\langle f, g\rangle$

8. لتكن $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ مصفوفات أوجد:

a. $\langle A, B\rangle$, b. $\langle B, C\rangle$, c. $\langle A, B + C \rangle$, d. $\langle A, B\rangle$

9. برهن أن $\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2 \| u \| + 2 \| v \|$

10. لتكن g, f دوال مستمرة حقيقية على الفترة [a, b] برهن أن:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\int_a^b g^2(x)dx$$

11. أوجد جيب تمام الزاوية θ بين $v = (5, 1)$ و $u = (-2, 3)$ في R^2.

12. أوجد جيب تمام الزاوية بين $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$ إذا كان $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ ضرب داخلي لمتعددات الحدود g, f في فضاء متعددات الحدود V.

13. إذا كان المتجه u عمودياً على المتجه v فإن مضروب u بكمية ثابتة هو أيضاً عمودياً على v.

6-3 الأساسات المتعامدة طريقة كرام - شمت:

اختيار الأساس ضروري في معظم فضاءات الضرب الداخلي حيث نختار الأساس الذي جميع متجهاته متعامدة مع بعضها على العكس من فضاءات المتجهات الأخرى حيث أن معظم التمارين لا تتقيد بأساس معين. سنركز إهتمامنا في هذا البند على كيفية الحصول على الأساسات المتعامدة.

تعريف (6-3-1):

مجموعة متجهات فضاء الضرب الداخلي يقال لها مجموعة متعامدة إذا كانت متجهاتها متعامدة مثنى - مثنى، ومجموعة المتجهات المتعامدة يقال لها عيارية إذا كان طول كل متجه فيها يساوي 1.

مثال (1):

متجهات الأساس الطبيعية $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ و $E_3 = (0, 0, 1)$ في R^3 متعامدة لان $\langle E_1, E_2\rangle = 0$, $\langle E_1, E_3\rangle = 0$ و $\langle E_2, E_3\rangle = 0$ إضافة لذلك فهي عيارية لأن طول كل منها يساوي 1.

مثال (2):

لتكن $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 0, -1)$ في R^3 المعرف عليه الضرب الداخلي الإقليدي.

لاحظ أن $\langle v_1, v_2\rangle = (0)(1) + (1)(0) + (1)(0) = 0$

وبنفس الطريقة $\langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_4\rangle = 0$

إذن $\{v_1, v_2, v_3\}$ مجموعة متعامدة.

والآن نجد أطوال المتجهات v_1, v_2, v_3:

$\|v_1\| = 1$, $\|v_2\| = \sqrt{2}$, $\|v_3\| = \sqrt{2}$ (باستخدام العلاقة $\|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}}$)

ثم نحول كل متجه للشكل العياري من خلال ضربة بمقلوب طوله لنحصل على:

$$u_1 = \frac{1}{\| v_1 \|} v_1 = \frac{1}{1} (0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$

$$= (0, 1, 0)$$

$$u_2 = \frac{1}{\| v_2 \|} v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u_3 = \frac{1}{\| v_3 \|} v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

عليه فإن المجموعة $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ عيارية متعامدة لأن:

1. $<u, u_1> = <u_1, u_3> = <u_2, u_3> = 0$

2. $\| u_1 \| = \| u_2 v \| = \| u_3 \| = 1$

❖ تمرين: برهن أن مجموعة المتجهات $\{E_1, E_2 \ldots, E_n\}$ هي مجموعة عيارية متعامدة حيث:
$E_n = (0, 0, \ldots, 1)$, $E_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $E_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

ملاحظة:

في فضاء الضرب الداخلي، الأساس الذي جميع متجهاته عيارية يسمى الأساس العياري. أما الأساس الذي جميع متجهاته متعامدة يسمى الأساس المتعامد.

مبرهنة (6-3-2):

لتكن $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساس عاري لفضاء الضرب الداخلي V، و u أي متجه في V، فإن:

$$u = <u, v_1> v_1 + \ldots + <u, v_n> v_n$$

البرهان:

بما أن T أساس V فإن:

$$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n$$

حيث $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ثوابت

عليه:

$$<u, v_i) = <k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n, v_i> \quad (i = 1, 2, \ldots, n \text{ حيث})$$

$$= k_1<v_1, v_i) + k_2 <v_2, v_i> + \ldots + k_n <v_n, v_i>$$

ولكن T أساس عياري للفضاء V، فإن:

$<v_i, v_i> = \| v_i \|^2 = 1$ و $<v_j, v_i>$ لكل $i \neq j$.

وبالتعويض ينتج:

$$<u_1, v_i> = k_i$$

ملاحظة:

الكميات الثابتة $<u, v_1>, <u, v_2>, \ldots, <u, v_n>$ تسمى إحداثيات u نسبة للأساس العياري T وتكتب:

$$(U)_T = (<u, v_1> , <u, v_2> , \ldots , <u, v_n >)$$

مثال (3):

ليكن $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ أساس عياري للفضاء R^n المعرف عليه ضرب داخلي إقليدي. نفرض أن $v_1 = (0, 1, 0)$، $v_2 = (-4/3, 0, 3/5)$، $v_3 = (3/5, 0, 4/5)$. عبر عن $u = (1, 1, 1)$ بشكل تركيب خطي للمتجهات v_1, v_2 و v_3 ثم أوجد $(U)_T$.

بما أن $<u, v_1> = 1$, $<u, v_2> = -\frac{1}{5}$, $<u, v_3> = \frac{7}{5}$

عليه (برهن ذلك):

$$u = v_1 - \frac{1}{5}v_2 + \frac{7}{5}v_3$$

أي أن

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

لذا فإن مركبات الإحداثيات للمتجه u نسبة إلى T هي:

$$(u)_T = (1, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$$

$$= (\langle u, v_1\rangle , \langle u, v_2\rangle , \langle u, v_3) \rangle$$

مبرهنة (3-3-6):

لتكن T أساس عياري لفضاء ضرب داخلي بعده n إذا كانت:

$$(v)_T = (v_1, v_2, \dots , v_n)$$

$$(u)_T = (u_1, u_2, \dots , u_n)$$

فإن:

$$\| u \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \quad \dots\dots (1)$$

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} \quad \dots\dots (2)$$

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \quad \dots\dots (3)$$

البرهان: تمرين للطالب.

واضح أن الجانب الأيمن من (1) مبرهنة (3-3-6) يمثل طول (معيار) U_T نسبة للضرب الداخلي الإقليدي للفضاء R^n. الجانب الأيمن في (3) من نفس المبرهنة فيمثل الضرب الداخلي الإقليدي للمتجهات الإحداثية $(U)_T$ و $(V)_T$. لذا عند التعامل مع الأساسات العيارية المتعامدة فإن حساب أطوال وحواصل الضرب الداخلي العامة يمكن اقتصارها على حساب أطوال وحواصل الضرب الداخلي الإقليدي للمتجهات الإحداثية.

مثال (4):

نفرض R^n فضاء معرف عليه ضرب داخلي إقليدي فإن طول المتجه $u = (1, 1, 1)$ هو:

$$\| u \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

وإذا كان الأساس العياري T هو كما في المثال (3)، فإن:

$$(u)_T = \left(1, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

وعليه فإن طول u يمكن إيجاده كذلك من هذا المتجه باستخدام الجزء الأول من مبرهنة (6-3-3)، أي:

$$\| u \| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{3}$$

ملاحظة:

إذا كانت $T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساس متعامد لفضاء المتجهات V فإنه من الممكن تحويل كل متجه متعامد في T إلى متجه عياري متعامد من خلال قسمته على طوله. أي أن:

$$T' = \left\{\frac{v_1}{\| v_1 \|}, \frac{v_2}{\| v_2 \|}, \dots, \frac{v_n}{\| v_n \|}\right\}$$

هو أساس عياري متعامد.

فإذا كان u أي متجه في الفضاء V فإنه بموجب مبرهنة (6-3-2) نستطيع كتابة u بالصيغة:

$$u = < u, \frac{v_1}{\| v_1 \|} > \frac{v_1}{\| v_1 \|} + < u, \frac{v_2}{\| v_2 \|} > \frac{v_2}{\| v_2 \|} + \dots + < u, \frac{v_n}{\| v_n \|} > \frac{v_n}{\| v_n \|} \quad .. (1)$$

وبموجب خواص الطول [بند (6-2)] فإن:

$$u = \frac{< u, v_1 >}{\| v1 \|^2} - v1 + \frac{< u, v^2 >}{\| v^2 \|^2} v_2 + \dots + \frac{< u, v_n >}{\| v_n \|^2} v_n \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

وهي تركيب خطي للمتجه u بدلالة الأساس المتعامد T.

مبرهنة (4-3-6):

إذا كانت $T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة متجهات متعامدة وغير صفرية في فضاء الضرب الداخلي، فإن T مستقلة خطياً.

البرهان:

نفرض أن:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$$

إذن:

$$\langle c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n, v_i\rangle = \langle 0, v_i\rangle = 0 \qquad (\text{لكل } v_i \in T)$$

أو بمعنى آخر:

$$c_1 \langle v_1, v_i\rangle + c_2 \langle v_2, v_i\rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i\rangle = 0$$

لكن $\langle v_j, v_i\rangle = 0$ عندما $j \neq i$ (T متعامدة)

إذن: $c_i \langle v_i, v_i\rangle = 0$

عليه فإن: $c_i = 0$ لأن $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

إذن T مستقلة خطياً.

مثال (5):

من المثال (2). $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

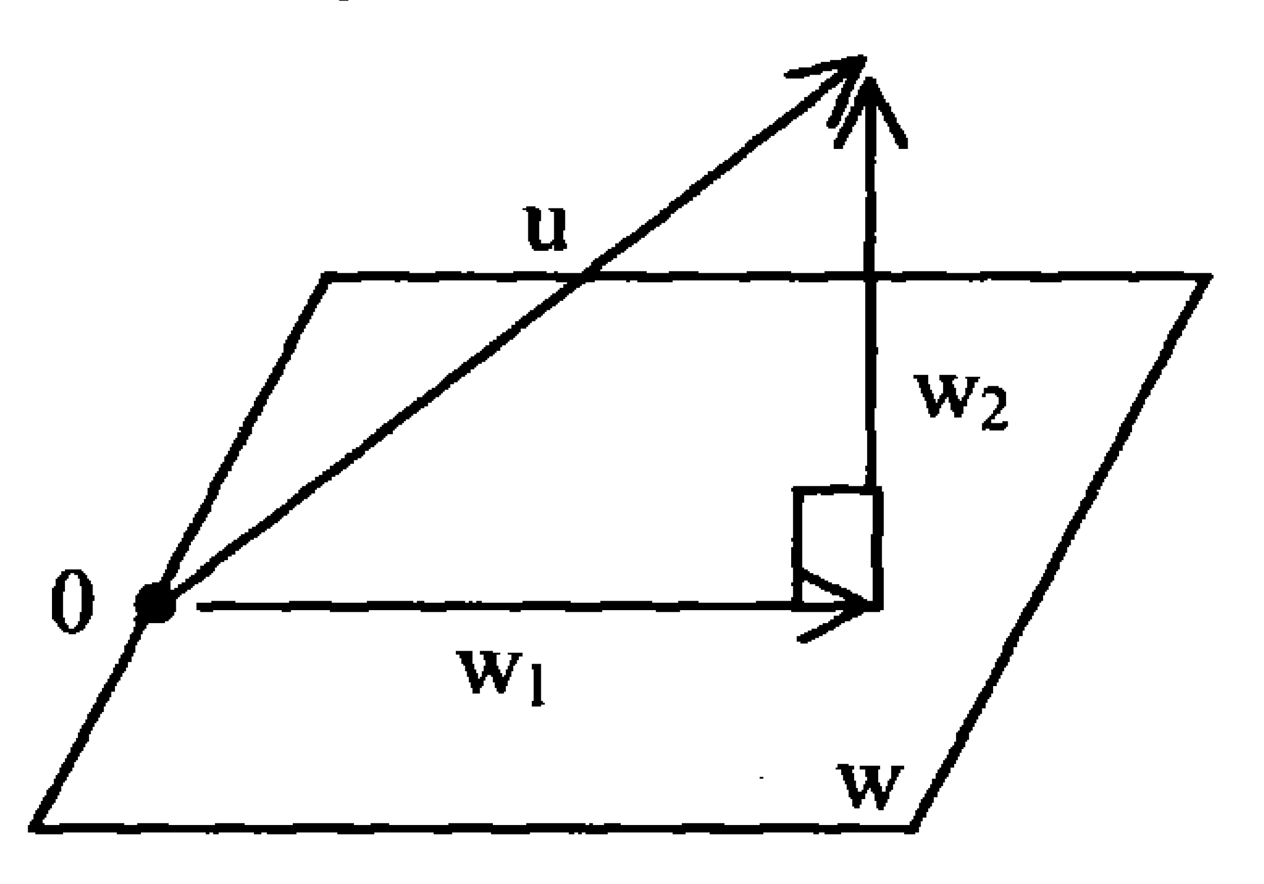
مجموعة عيارية نسبة للضرب الداخلي الإقليدي في R^3. بما أن v_1, v_2, v_3 مجموعة مستقلة خطياً وأن بعد R^3 هو 3، فإن $\{v_1, v_2, v_3\}$ أساس عياري للفضاء R^3.

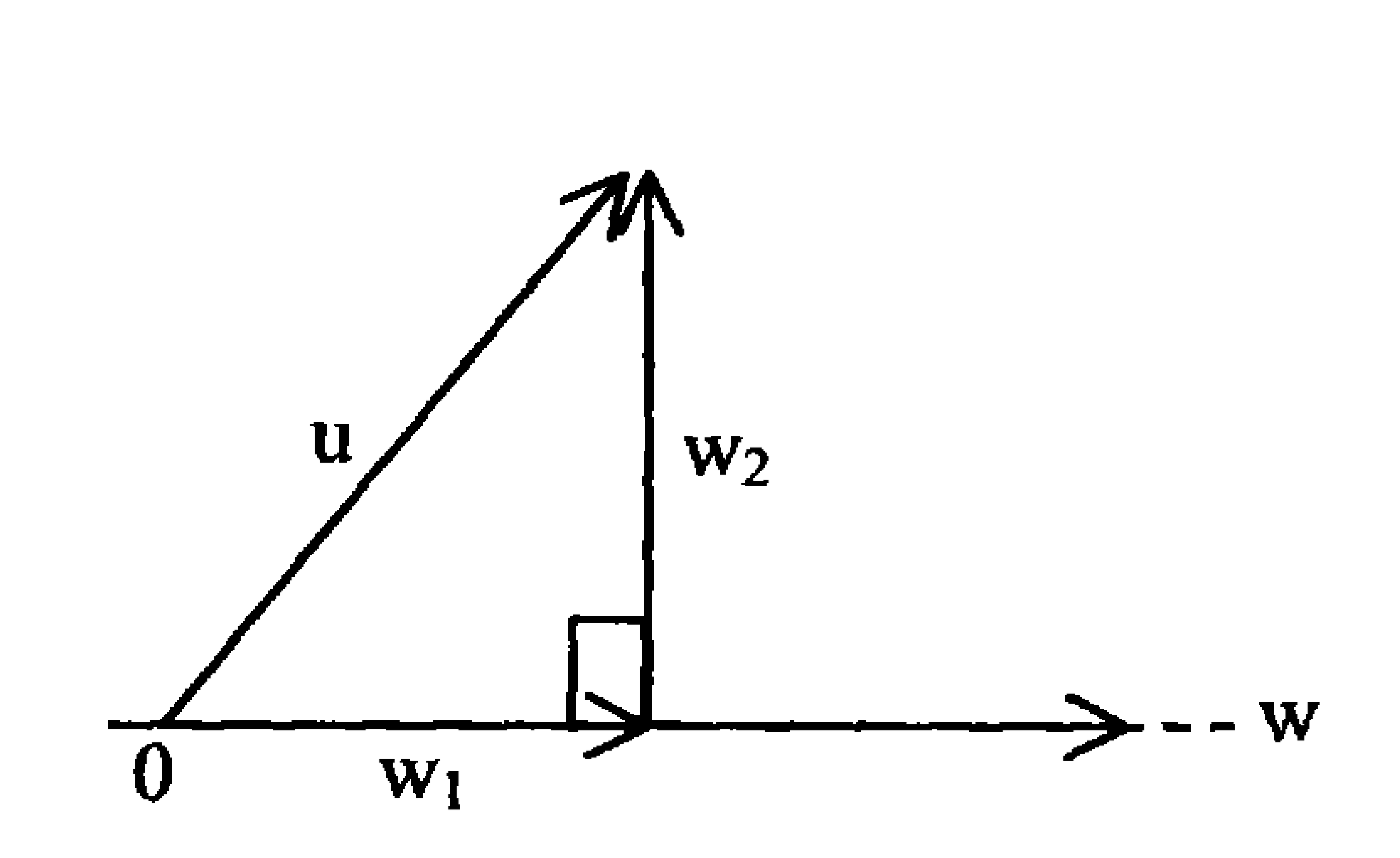
المساقط المتعامدة:

إذا كانت w مستقيم (أو مستوى) في R^2 (أو R^3) تمر خلال نقطة البداية (نقطة الأصل) و u متجه ما مرسوم في الفضاء R^2 (أو الفضاء R^3) [لاحظ الشكل (2-6)]، فإن:

$u = w_1 + w_2$

حيث W_1 في W و W_2 عمود على w1.W يسمى مسقط u على العمود W ويرمز له $peoj_w u$ w_L. تسمى مركبة u العمودية على W ويرمز لها $proj_{w1}$ u.





شكل (2-6)

عليه فإن:

$u = w_1 + w_2$ .... (3)

أو:

$u = proj_w u + proj_{wi} u$ .... (4)

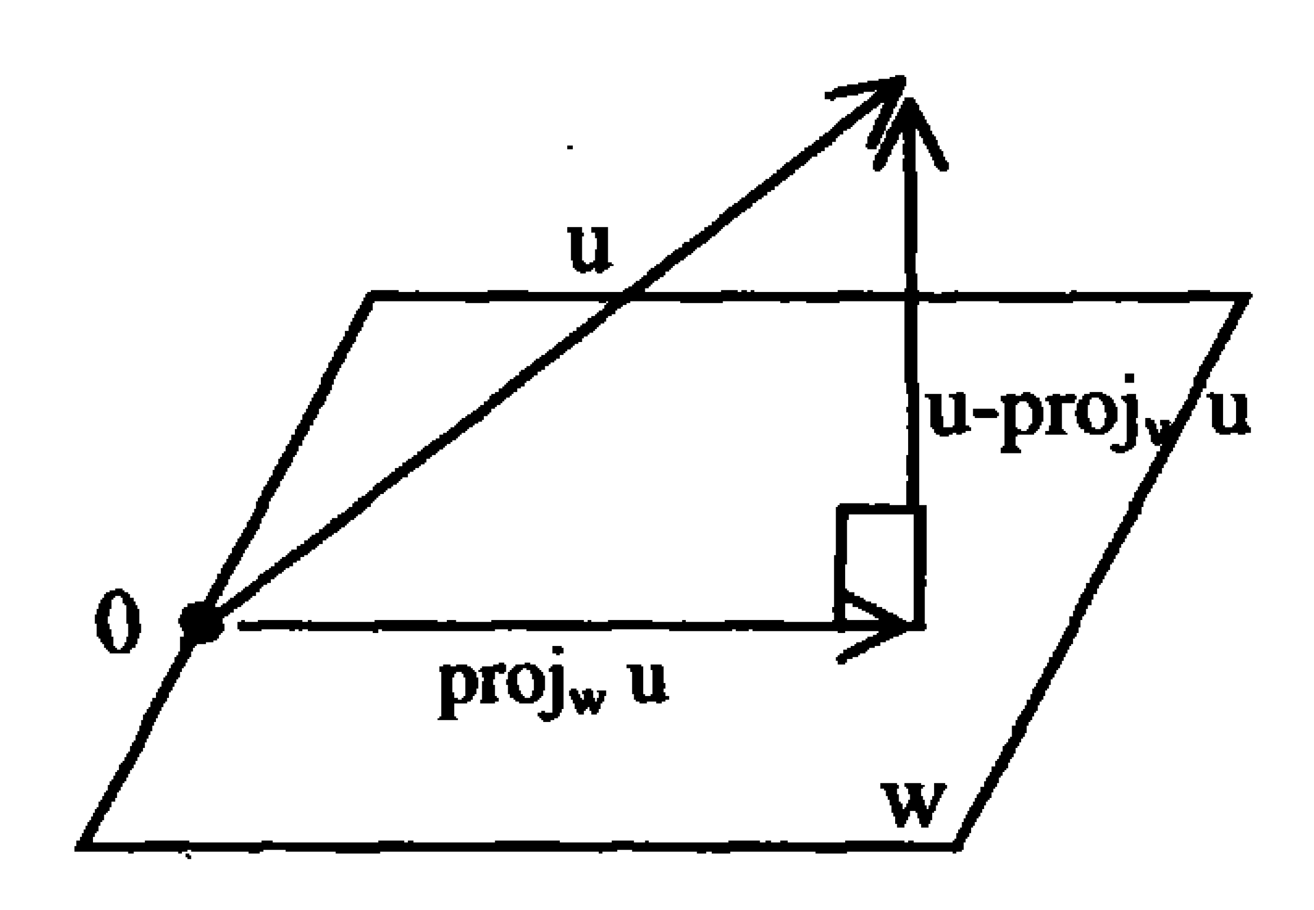
لكن $w_2 = u - w_1$

إذن: $proj_{w1} = u - proj_w u$.

أو:

$u = projw^u + (u - proj_w u)$ .... (5)

[لاحظ الشكل (3-6)]



شكل (3-6)

مبرهنة (5-3-6):

ليكن W فضاء جزئي ذات بعد منتهى في فضاء الضرب الداخلي W. فإن

(1) إذا كانت $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ أساس عياري للفضاء الجزئي w, u متجه لا على التعين في V فإن:

$$\text{proj}_w u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \ldots + \langle u, v_r\rangle v_r \quad \ldots\ldots (6)$$

(2) إذا كان $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ أساس متعامد للفضاء الجزئي w, u متجه لا على التعين في V، فإن:

$$\text{proj}_w u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\| v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\| v_2\|^2} v_2 + \ldots + \frac{\langle u, v_r\rangle}{\| v_r\|} v_r \quad \ldots\ldots (7)$$

البرهان:

يترك كتمرين.

مثال (6):

ليكن w فضاء جزئي من R^3 المعرف عليه الضرب الداخلي الإقليدي حيث W متولد من المتجهات العيارية $v_1 = (0, 1, 0)$ و$v_2 = \left(\frac{-4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$.

من العلاقة (5) المسقط العمودي للمتجه $u = (1, 1, 1)$ على W هو:

$$\text{prouj}_w\, u = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle\, v_2$$
$$= (1)\,(0, 1, 0) + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{25}\right)$$
$$= \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right)$$

ومركبة u العمودية على W هي:

$$\text{proj}_w\, u = u - \text{proj}_{w1}\, U$$
$$= (1, 1, 1) - \left(\frac{-4}{5}, 1, -\frac{3}{25}\right)$$
$$= \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right)$$

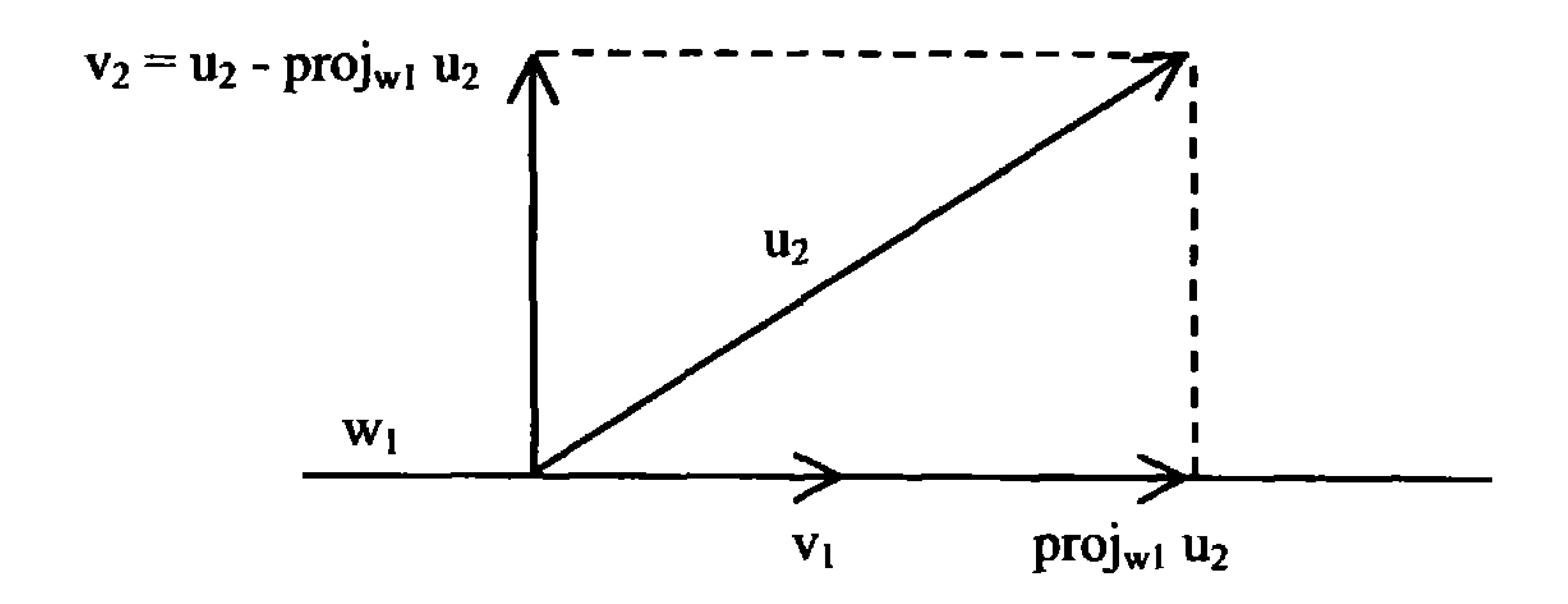
لاحظ أن $\text{proj}_w\, u$ عمود على كل متجه في W لأنه عمود على v_1 و v_2 المولـدة للفضاء W.

طريقة (كرام-شمت) لإيجاد الأساس العياري المتعامد لفضاء الضرب الداخلي V:

يمكن تلخيص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

1. نفرض أن $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ أي أساس الفضاء V وليكن $v_1 = u_1$.
2. نجد v_2 العمود على v_1 من خلال إيجاد u_2 العمود على الفضاء w_1 المتولـد مـن v_1 وكالآتي: [الصيغة 7 ولاحظ الشكل 4-6].

$$v_2 = u_2 - \text{proj}_{w1}\, u_2 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|} v_1$$

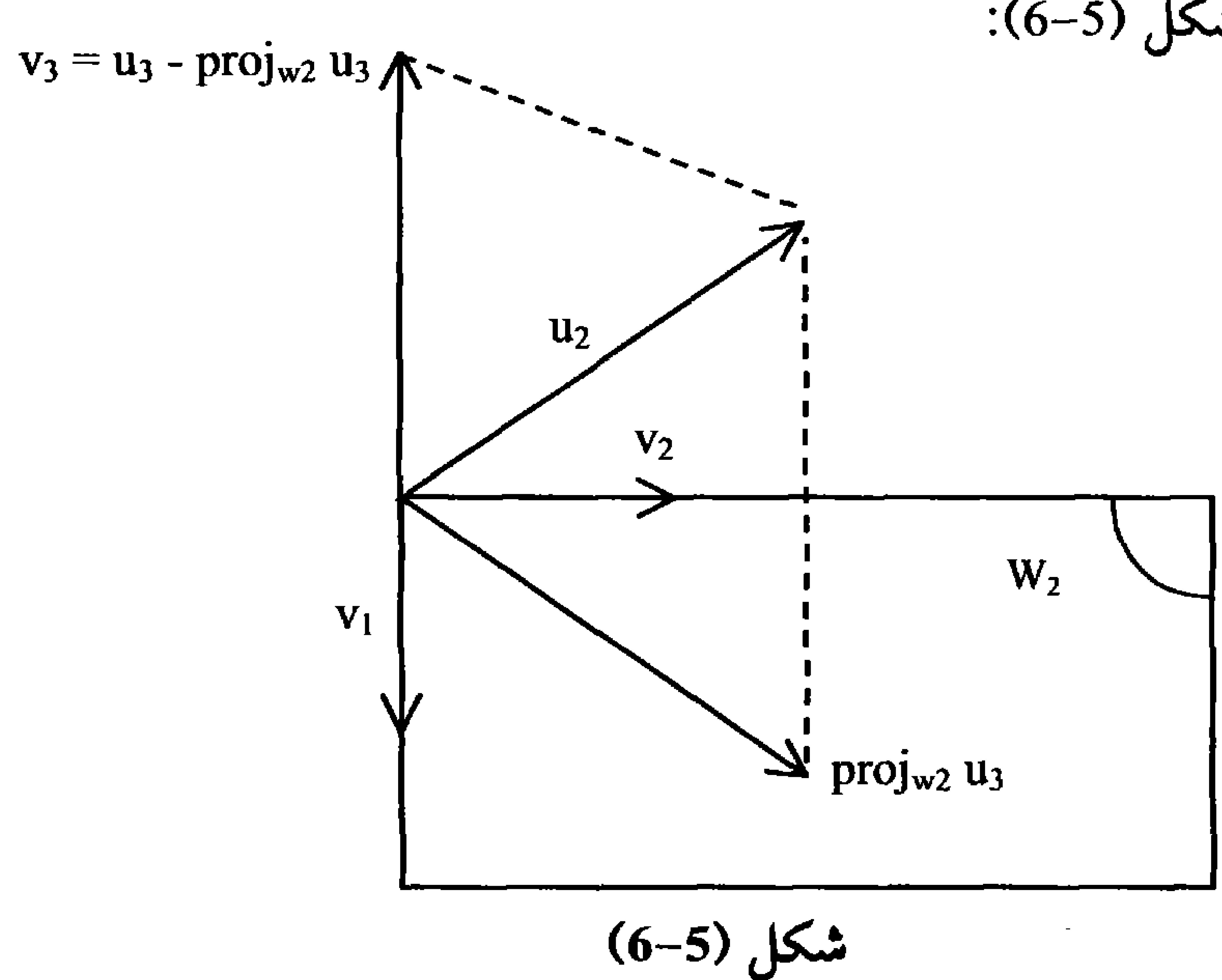


شكل (6-4)

3. نجد v_3 العمود على v_1 و v_2 من خلال إيجاد مركب u_3 العمود على الفضاء W المتولد بواسطة v_1 و v_2 بإستخدام الصيغة (7).

$$v_3 = u_3 - proj_{w2}\, u_3 = u_3 - \frac{<u, v_1>}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{<u_3, v_2>}{\|v_2\|^2} v_3$$

لاحظ الشكل (6-5):



شكل (6-5)

4. والآن نجد v_4 العمود على كل من v_1 و v_2 و v_3 بإيجاد مركب u_4 العمود على W_3 المتولد من v_1, v_2, v_3 مستخدماً الصيغة (7).

وكما يلي:

$$v_4 = u_4 - proj_{w3}\, u_4 = v_3 - \frac{< u_4, v_1 >}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{< u_4, v_2 >}{\| v_2 \|^2} v_2 - \frac{< u_4, v_3 >}{\| v_3 \|^2} v_3$$

5. بالاستمرار على نفس الأسلوب إلى n من الخطوات سنحصل على v_n حيث:

$$v_n = u_n - proj_{wn-1}\, u_n = u_n - \frac{< u_n, v_1 >}{\| v_1 \|^2} v_1 - \frac{< u_n, v_2 >}{\| v_2 \|^2} v_2 - \ldots - \frac{< u_n, v_3 >}{\| v_{n-1} \|^2} v_{n-1}$$

العلاقة الواردة في الخطوة (5) أعلاه تسمى الصيغة العامة لإيجاد الاساسات المتعامدة.

وهكذا نحصل على مجموعة المتجهات المتعامدة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ والتي تحتوي على n من المتجهات.

بما أن بعد V هو n وإن أي مجموعة من المتجهات المتعامدة مستقلة خطياً فإن المجموعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ هي الأساس المتعامد.

6. ثم نجد طول كل متجه في المجموعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ وكالآتي:

$$z_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad , z_n = \frac{v_2}{\|v_2\|} , \ldots\ldots\ldots , z_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

7. عليه فإن $\{z_1, z_2, \ldots z_n\}$ هي مجموعة n من المتجهات العيارية المتعامدة وهي الأساس العياري المتعامد للفضاء V.

مثال (7):

أوجد الأساس العياري المتعامد للفضاء الجزئي W من R^3 المتولد من $u_1 = (1, 0, 1)$ و $u_2 = (1, 1, 1)$.

باستخدام الطريقة أعلاه نفرض $u_1 = u_1 = (1, 0\ 1)$

إذن:

$$v_2 = u_2 - \frac{< u_2, v_1 >}{\| v_1 \|} v_1$$

$$= (1, 1, 1) - \frac{<(1,1 1),(1,0,1)>}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1)$$

$$= (1, 1, 1) - \frac{2}{2}(1, 0, 1)$$

$$= (1, 1, 1) - (1, 0, 1)$$

$$= (0, 1, 0)$$

عليه { (1, 0, 1) ,(0, 1, 0)} هو الأساس المتعامد.

والآن نجد أطوال v_2, v_1 كالآتي:

$$\| v_1 \| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\| v_2 \| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

إذن:

$$Z_1 = \frac{v_1}{\| v_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

أي:

$$Z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

و:

$$Z_2 = (0, 1, 0)$$

عليه فإن الأساس العياري المتعامد هو { (0, 1, 0) , $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$}

مثال (8):

أوجد الأساس العياري المتعامد للفضاء R^3 إذا علمت أن الأساس الاعتيادي هو: { $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0)$} بما أن u_2, u_1 متعامدان نفرض أن $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ ثم نجد v_3 كالآتي:

$$v_3 = (1, 0, 0) - \left(\frac{(1,0,0),(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|^2}\right)(1,1,0) - \left(\frac{(1,0,0),(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|^2}1,-1,0)\right)$$

$$= (1, 0, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{3}(1, -1, 1)$$

$$= (1, 0, 0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

عليه فإن $v_3 = (-1, 1, 2)$ (بالضرب في 6-).

إذن الأساس المتعامد هو $\left\{\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right), (1, -1, 1), (1, 1, 0)\right\}$

والآن نجد طول كل من v_3, v_2, v_1 وبقسمة كل منهما على طوله نحصل على الأساس العياري المتعامد

$$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$$

مثال (9):

نفرض V فضاء متجهات لدوال حقيقية مستمرة على $-\pi \le t \le \pi$ مع الضرب الداخلي المعرف $<f, g> = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ و T معرفة بالشكل:

$$T = \{1, \text{Sin}t, \text{Cos}t, \text{Sin}\,2t, \text{Cos}(2t), , , ...\}$$

هل أن T أساس عياري.

الحل:

لاحظ أن T متعامدة لأن $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt = 0$ لكل $f, g \in T$ لكن T ليست عيارية لأن:

$$<\cos t\,,\ \text{Sin}t> = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$$

تمارين (3-6)

1. أي من مجموعة المتجهات الآتيـة في R^3، المعـرف عليـها عملـة الضـرب الداخلـي الإقليدي متعامدة وأي منها عيارية.

a. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,1,0)$

b. (1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)

c. (0, 1, -1), (0, 1, 1), (2, 0, 0)

2. حول الأساس { (1, 1, 1) ,(0, 1, 1) , (1, 2, 3) } إلى أسـاس عيـاري متعـامد للفضاء R^3 المزود بالضرب الإقليدي.

3. استخدم طريقة كرام- شمت لتحويل الأساس
{ (1, 0, 0) ,(1, 1, 0) ,(1, 1, 1)} إلى أساس عياري متعامد.

4. هل أن $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$
أساس عياري للفضاء R^3 المزود بالضرب الداخلي الإقليدي.

5. لتكن $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 4\\ 7 & -5 & 2\end{bmatrix}$

(1) هل أن A متعامدة.

(2) هل أن أعمدة A متعامدة.

6. لتكن B مصفوفة حصلنا ليها بتحويل صفـوف A إلى صفـوف عياريـة. أوجـد B، هل أن B متعامدة.

6-4 المصفوفات المتعامدة، تبديل الأساسات:

نتناول في هذا البند دراسة العلاقة بين مفهوم الأساس ومصفوفة الإحداثيـات، وسندرس أيضاً طريقة تبديل أساسات فضاء المتجهات.

تعريف (1-4-6):

يقال للمصفوفة المربعة A بأنها متعامدة إذا تحققت العلاقة:

$$A^{-1} = A^{T}$$

يمكن كتابتها بالصيغة:

$$A^{T} A = AA^{T} = 1 \quad \text{.......} \quad (1)$$

ويمكن كتابتها بالشكل:

$AA^{T} = 1$ أو $A^{T}A = 1$

مثال (1):

برهن ان $A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة. أوجد A^{-1}.

لما كان:

$$A^{T}A = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن A متعامدة.

كما وأن $A^{-1} = A^{T} = A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ لأن A مصفوفة متناظرة.

مثال (2):

المصفوفة الأساسية لدوران R^2 حول زاوية قيمتها θ هي:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

لذا فإن A متعامد لكل قيم θ لأن

$$A^T A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مبرهنة (2-4-6):

لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$ فإن الصيغ الآتية تكون متكافئة.

1. A متعامدة.
2. متجهات صفوف A تكون مجموعة عيارية في R^n مع الضرب الداخلي الإقليدي.
3. متجهات أعمدة A تكون مجموعة عيارية في R^n مع الضرب الداخلي الإقليدي.

البرهان: $2 \Leftrightarrow 1$

العنصر في الصف i والعمود رقم j في حاصل الضرب AA^T هو الضرب النقطي للمتجه في الصف i من A والمتجه العمود رقم j في A^T. لكن متجه العمود رقم j في A^T هو نفسه متجه الصف رقم j في A. لذا إذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_n$ هي متجهات صفوف A فإن الضرب AA^T يمكن كتابته بالشكل:

$$AA^T = \begin{bmatrix} a_1.a_1 & a_1.a_2 & \dots & a_1.a_n \\ a_2.a_1 & a_2.a_2 & \dots & a_2.a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n.a_1 & a_n.a_2 & \dots & a_n.a_n \end{bmatrix}$$

لذا فإن $AA^T = 1$ إذا وفقط إذا كان $a_1.a_1 = a_2.a_2 = \dots = a_n a_n = 1$

و $a_i - a_j = 0$ عندما $j \neq i$، هذه العلاقات تكون صحيحة إذا وفقط إذا $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ مجموعة عياريه في R^n.

بنفس الأسلوب نبرهن 3 $\Leftrightarrow$ 1.

خواص المصفوفات المتعامدة:

إذا كانت A و B مصفوفتان متعامدتان فإن:

1. معكوس A مصفوفة متعامدة.
2. A B مصفوفة متعامدة.
3. $\det A = 1$ أو $\det A = -1$

البرهان:

1. بما أن A متعامدة فإن $A^T = A^{-1}$ لهذا فإن A^{-1} متعامدة.
2. لدينا $A^T = A^{-1}$ و $B^T = B^{-1}$ عليه:

$$(AB)\,(AB)^T = AB\,B^T A^T = ABB^{-1}A^{-1} = I$$

إذن
$$(AB)^T = (AB)^{-1}$$

ومن هذا نستنتج أن AB متعامدة.

3. لدينا $AA^T = 1$

عليه:
$$1 = |I| = |AA^T| = |A|\,|A^T| = |A|^2$$

إذن
$$|A| = 1 \quad \text{أو} \quad |A| = -1$$

تبديل الأساسات

سنكتفي بشرح طريقة تبديل الأساسات في فضاء البعد الثاني ومن ثم نعمم تلك الطريقة للبعد n.

نفرض $S = \{v_1, v_2\}$ هي مجموعة الأساس القديم و $S' = \{v'_1, v'_2\}$ الأساس الجديد. لإيجاد مصفوفات الإحداثيات لمتجهات الأساس الجديد نسبة للأساس القديم نفترض أن $[v'_1]_S = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و $[v'_2]_S = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ أي أن:

$v'_1 = av_1 + bv_2$

$v'_2 = cv_1 + dv_2$ .... (2)

ليكن v أي متجه في V و $[v]_{s'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ مصفوفة الإحداثيات الجديدة بحيث أن:

$v = k_1 v'_1 + k_2 v'_2$ .... (3)

ولكي نجد إحداثيات المتجه v القديمة نكتب v بدلالة الأساس S نعوض (2) في (3) سنحصل على:

$$v = k_1 (av_1 + bv_2) + k_2 (cv_1 + dv_2)$$
$$= (k_1a + k_2c)\, v_1 + (k_1b + k_2d)\, v_2$$

عليه فإن مصفوفة الإحداثيات القديمة للمتجه v هي:

$$[v]_s = \begin{bmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 b \end{bmatrix}$$

بمعنى آخر:

$$[v]_s = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

أي:

$$[v]_s = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [v]_{s'}$$

أي ان مصفوفة الإحداثيات القديمة $[v]_s$ تساوي حاصل ضرب مصفوفة الإحداثيات الجديدة بالمصفوفة $P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ من جهة اليسار حيث أعمدة P هي إحداثيات متجهات الأساس الجديد نسبة للأساس القديم.

وبصورة عامة:

إذا نقلنا أساس فضاء المتجهات V من الأساس القديم $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ إلى الأساس الجديد $S' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ فإن مصفوفة الإحداثيات القديمة $[v]_s$ للمتجه v يمكن ربطها بمصفوفة الإحداثيات الجديدة $[v]_{s'}$ لنفس المتجه v بواسطة العلاقة:

$$[v]_S = P\,[v]_{S'} \qquad (4)$$

حيث أن أعمدة P هي مصفوفات إحداثيات الأساس، لجديد نسبة للأساس القديم، أي أن أعمدة P هي:

$$[v'_1]_S = [v'_2]_S, \dots, [v'_n]_S$$

تعريف (3-4-6):

المصفوفة P التي تنقل الأساس الجديد 'S للأساس القديم S تسمى مصفوفة <u>انتقال 'S إلى S</u> ويعبر عنها كمتجهات أعمدة بالشكل:

$$P = [\,[v'_1]_s, [v'_2]_s, \dots, [v'_n]_s\,] \qquad (5)$$

مثال (3):

ليكن $\{ S = \{v_1 = (1, 0), v_2\,(0,1)$, $S' = \{v'_1 = (3, 5), v_2 = (2, 1)\}$ لذا يمكن كتابه v'_1 و v'_2 بالصيغ:

$$v'_2 = 2v_1 + v_2 \qquad , \qquad v'_1 = 2v_1 + 5v_2$$

إذن: $[v'_1]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $[v'_2]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

لذا فإن مصفوفة الانتقال من 'S إلى S هي $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

ولإيجاد $[v]_S$ إذا كان $[v'] = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ نستخدم العلاقة (4)، أي

$$[v]_S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$[v]_S = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

مثال (4):

إذا كانت v_1, v_2, v'_1, v'_2 كما في المثال (3) فما هي مصفوفة الانتقال من 'S إلى S.

من الواضح أن:

$$v_1 = -\frac{1}{7}v'_1 + \frac{5}{7}v'_2$$

$$v_2 = \frac{2}{7}v'_1 + \frac{3}{7}v'_2$$

لذا $[v_1]_{S'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix}$, $[v_2]_{S'} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$

إذن مصفوفة الانتقال من 'S إلى S هي:

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

خواص مصفوفات الانتقال :

1. إذا ضربنا مصفوفة الانتقال من S إلى 'S بمصفوفة الانتقال من 'S إلى S نجد أن:

$$PQ = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

لهذا فإن $PQ = I$ أي أن $Q = P^{-1}$

2. إذا كانت P مصفوفة الانتقال من 'S إلى S. فإن لكل متجه v تتحقق العلاقات الآتية:

$$[v]_S = P\,[v]_{S'} \quad \text{......} \quad (6)$$

و:

$$[v]_{S'} = P^{-1}\,[v]_S \quad \text{......} \quad (7)$$

3. إذا كانت P مصفوفة انتقال من أساس عياري إلى أساس عياري آخر لفضاء الضرب الداخلي، فإن P مصفوفة متعامدة، أي أن $P^{-1} = P^T$.

مثال (5):

لتكن $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ الناتجة من تدوير المحاور x, y بزاوية θ إلى المحاور x', y'.

عليه فإن:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad , \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

حيث $P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

إذن:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

أو:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

تمارين (6-4)

1. بين أن $A = \begin{bmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ -9/25 & 4/5 & -12/25 \\ 12/25 & 3/5 & 16/25 \end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة باستخدام الطريقة الآتية:

   a. حساب A^TA.

   b. الجزء الثاني من المبرهنة (2-4-6).

   c. الجزء الثالث من المبرهنة (2-4-6).

2. لتكن $S_1 = \{u_1 = (1, -2), u_2 = (1, -2)\}$ و $S_2 = \{v_1 = (1, 3), v_2 = (3, 5)\}$ كل منهما أساس R^2. أوجد:

   a. مصفوفة الانتقال P من S_1 إلى S_2.

   b. مصفوفة الانتقال Q من S_2 إلى S_1.

3. لتكن $S = \{u_1 = (1\ \ 2,\ 0),\ u_2 = (1,\ 3,\ 2),\ u_3 = (0,\ 1,\ 3)\}$
   و $S' = \{v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (1, 4, 6)\}$

   a. أوجد إحداثيات المتجه $(a, b, c) \in R^3$ نسبة للأساس S.

   b. اكتب v_1, v_2, v_3 في 'S لتركيب خطي للأساس $S = \{u_1, u_2, u_3\}$

   c. أوجد مصفوفة الانتقال P من الأساس S للأساس 'S.

4. عودة للسؤال 3:

   a. أوجد احداثيات $(a, b, c) \in R^3$ نسبة للأساس 'S.

   b. اكتب u_3, u_2, u_1 كتركيب خطي من 'S.

c. أوجد مصفوفة الانتقال Q من 'S إلى S.

d. برهن أن $Q = P^{-1}$

5. أوجد مصفوفة الانتقال p من الأساس الطبيعي $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ في R^3

6. أوجد مصفوفة الانتقال Q من S إلى E في السؤال (5). برهن $Q = P^{-1}$

7. أوجد مصفوفة إحداثيات $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ نسبة إلى $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

حيث

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. أوجد مصفوفة الإحداثيات P نسبة إلى $S = \{P_1, P_2, P_3\}$ حيث

$P_3 = x^2 \quad , \quad P_2 = x \quad , \quad P_1 = 1 \quad , \quad P = 4 - 3x + x^2$

الفصل السابع



القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

الفصل السابع

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

في كثير من العلوم تظهر لدينا متجهات غير صفرية X بحيث أن X و AX متجهات أحدهما يكون مضروب الآخر، كالعلوم الهندسية والفيزياء والاقتصاد والهندسة وغير ذلك. في هذا الفصل ستتعلم كيفية إيجاد تلك المتجهات وسنسلط الضوء على بعض من تطبيقاتها.

(7-1) القيم الذاتية والمتجهات الذاتية:

تعريف (7-1-1):

يقال للمتجه غير الصفري X في R^n، المتجه الذاتي للمصفوفة A ذات السعة $n \times n$ إذا تحققت العلاقة:

$$AX = \lambda X$$

حيث λ ثابت. الكمية الثابتة λ تسمى القيمة الذاتية للمصفوفة A و X يقال له متجه ذاتي مرافق للثابت λ.

مثال (1):

$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ هو متجه ذات للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ يرافق القيمة الذاتية λ

وذلك لأن:

$$AX = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 4X$$

ملاحظة:

تسمى λ (أحيانا) القيمة الطيفية و X المتجه الطيفي.

طريقة إيجاد القيمة الذاتية والمتجه الذاتي للمصفوفة A:

1. من التعريف لدينا $AX = \lambda X$.
2. يمكن كتابة $AX = \lambda X$ بالشكل:

$$(\lambda I - A)\,X = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

3. المعادلة $(\lambda I - A)\,X = 0$ لها حل غير صفري إذا وفقط إذا $\det(\lambda I - A) = 0$ المعادلة $\det(\lambda I - A) = 0$ تسمى المعادلة المميزة والثوابت التي تحقق هذه المعادلة تسمى القيم الذاتية للمصفوفة A.
4. ننشر $|\lambda I - A|$ بدلالة λ فنحصل على متعددة حدود تسمى متعددة الحدود المميزة.
5. إذا كانت سعة A هي $n \times n$ فإن متعددة الحدود المميزة تأخذ الشكل:

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

وهذه المعادلة يكون لها على الأكثر n من الحلول.

مثال (2): أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

لدينا

$$|\lambda I - A| = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 10 & 9 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 10)(\lambda + 2) + 36 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

إذن: وبالتحليل نحصل على $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4$، أي أن للمعادلة جذران متساويان وحقيقيان.

تمرين: ماذا يحدث إذا حذفنا المصفوفة I من العلاقة (1)؟

مثال (3):

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

بما أن: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda - 0 & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$

إذن $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

أو $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

∴ القيم الذاتية هي: $\lambda_3 = 3 , \lambda_2 = 2, \lambda_1 = 1$

مثال (4):

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

لما كان محدد المصفوفة المثلثية هو حاصل ضرب العناصر في القطر الرئيسي (راجع الفصل الثاني)، فإن:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & \lambda - a_{23} & -a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

إذن $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) = 0$

لذا فالقيم الذاتية هي: $\lambda_{33} = a_{33} , \lambda_2 = a_{22}, \lambda_1 = a_n$

ملاحظة:

إذا كانت A مصفوفة مثلثية فإن قيم A الذاتية هي العناصر في القطر الرئيسي.

من خلال المناقشات والأمثلة أعلاه يمكننا برهان المبرهنة التالية بسهولة.

مبرهنة (2-1-7):

لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$ و λ عدد حقيقي فإن الخواص الآتية تكون متكافئة.

1. λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A.
2. النظام $(\lambda I - A) X = 0$ يحتوي على حلول غير صفرية.
3. يوجد متجه غير صفري X في R^n بحيث $AX =- \lambda X$.
4. λ هو حل المعادلة المميزة $\det (\lambda I - A) = 0$

الآن وبعد أن عرفنا كيف نجد القيم الذاتية نعود لمسألة إيجاد المتجهات الذاتية. متجهات A الذاتية التي ترافق القيمة الذاتية λ هي عبارة عن المتجهات غير الصفرية X التي تحقق العلاقة:

$$AX = \lambda X$$

بمعنى آخر، المتجهات المرافقة إلى λ هي المتجهات غير الصفرية في فضاء حل المعادلة $(\lambda I - A) X = 0$ هذا الفضاء يسمى الفضاء الذاتي للمصفوفة A المترافق مع λ.

مثال (5):

أوجد أساس الفضاء الذاتي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

من حل المعادلة المميزة لهذه المصفوفة نحصل على:

$$(\lambda - 1) (\lambda - 5)^2 = 0$$

أي ان القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 5$

لذا فالمتجه $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ هو متجه ذاتي للمصفوفة A المرافق للقيمة الذاتيـة λ إذا وفقط إذا:

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{...} \quad (2)$$

وعندما $\lambda = 5$ فإن (1) تصبح:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام نجد:

$x_3 = t \ , x_2 = s \ , x_1 = -s$ حيث t, s وسطين كل منهما لا يساوي صفر.

لذا فإن متجهات A الذاتية المرافقة للقيمة $\lambda = 5$ هي المتجـهات غـير الصفريـة الآتية:

$$X = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أي: $X = S \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

وبما أن $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ مستقلة خطياً (لماذا؟) فإنهما يشـكلان أسـاس الفضـاء الذاتي المرافق لـ $\lambda = 5$.

وعندما $\lambda = 1$ فإن المعادلة (1) تصبح:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبحلها نحصل على:

$x_3 = 0 \;, x_2 = t \;\;, x_1 = t$

عليه فإن المتجهات الذاتية المرافقة $\lambda = 1$ هي المتجهات بالشكل:

$$X = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ هو أساس الفضاء الذاتي المرافق $\lambda = 1$

مثال (6):

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

عليه $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$

وبحل المعادلة نحصل على (برهن ذلك) $\lambda_3 = 3 \;, \lambda_2 = -2, \lambda_1 = 1$

$\therefore$ عندما $\lambda = 1$ فإن:

$$(A-I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن ذلك وبحل هذا النظام (استخدم طريقة اختزال الصفوف) فإن:

$x_2 = 4x_3 , x_1 = -x_3$

إذن المتجه الذاتي هو $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ المرافق للقيمة $\lambda = 1$ والـذي يكـون أسـاس للفضاء الذاتي المقابل إلى $\lambda_1 = 1$

وعندما $\lambda_2 = -2$ وباستخدام نفس الأسلوب أعلاه نحصل:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباختزال المصفوفة نحصل على:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لذا فإن $x_1 = - x_2 , x_1 = -3$

أي أن المتجه الذاتي هو $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ويكون أساساً للفضاء المرافق للقيمة $\lambda = -2$

وأخيراً عندما $\lambda_3 = 3$ يكون لدينا.

$x_2 = 2x_1 \quad , \quad x_3 = x_1$

لذا فإن:

$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ يكون أساساً للفضاء الذاتي المرافق إلى $\lambda = 3$

تمرين: إذا كانت λ عدد ثابت موجب وهو قيمة ذاتية للمصفوفة A و X هو المتجه المرافق. برهن أن λ^k هي قيمة ذاتية للمصفوفة A^k، حيث k عدد موجب.

(تلميح: خذ الحالة الخاصة λ^2 وبرهن أنها قيمة ذاتية للمصفوفة A^2 ثم عمم الحالة).

مثال (7):

بالعودة للمثال (6) نلاحظ أن $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$ هي قيم ذاتية لـ $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$ لذا فإن $\lambda_1 = 1^4 = 1$ هي قيمة ذاتية للمصفوفة A^4، وهكذا القيم الذاتية $\lambda_2 = 2^4 = 16$ و $\lambda_3=3^4 = 81$ هما قيمتان ذاتيتان للمصفوفة A^4 أيضاً.

كذلك لاحظنا أن $\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{bmatrix}$ هو متجه ذاتي لـ A يرافق القيمة الذاتية $\lambda = 1$ لذا وبواسطة الملاحظات أعلاه فإن المتجه نفسه هو متجه ذاتي لـ A^4 ويرافق $\lambda = 1^4=1$ بنفس الطريقة $\lambda = -2$, $\lambda_3 = 3$.

مبرهنة (3-1-7):

لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$، فإن A قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا كانت $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية لـ A.

البرهان:

لاحظ أن $\lambda = 0$ هي حل للمعادلة المميزة:

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

إذا وفقط إذا $c_n = 0$. لـذا يكفينا أن نـبرهن أن A لهـا معكـوس إذا وفقـط إذا $c_n \neq 0$ ، لكن:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

وعند تعويض $\lambda = 0$، فإن:

$$\det(-A) = c_n$$

أو

$$(-1)^n \det(A) = c_n$$

أي أن $\det A = 0$ إذا وفقط إذا $c_n = 0$. بمعنى آخر، A قابلة للانعكاس إذا فقط إذا $c_n \neq 0$.

مثال (8):

بالعودة للمثال (5)، المصفوفة A قابلة للانعكـاس لأن القيـم الذاتيـة لهـا هـي $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 5$ وكلاهما لا تساوي صفر.

ملاحظة:

بإضافة الخاصية الواردة في المبرهنة (3-1-7) إلى الخواص الـواردة في المبرهنـة (9-6-5) سنحصل على عشرون خاصية متكافئة.

تمرين: اكتب هذه الخواص

تمارين (7-1)

1. لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$، أوجد:

a. المعادلة المميزة.

b. القيم الذاتية.

c. المتجهات الذاتية.

2. أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A^9 إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & 1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. أوجد محدد A إذا كانت معادلتها المميزة لها:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 5 = 0$$

4. إذا كانت λ هي القيمة الذاتية و X المتجه الذاتي للمصفوفة القابلة للانعكـاس A.
برهن أن $1/\lambda$ هي القيمة الذاتية لـ A^{-1} و X المتجه الذاتي المرافق.

7-2 أقطرة المصفوفات:

سنركز اهتمامنا في هذا البند على إيجاد أساس R^n المتكون من المتجهات الذاتية للمصفوفة A ذات السعة $n \times n$، ومن ثم توظيفها في العلوم التطبيقية.

تعريف (7-2-1):

يقال للمصفوفة المربعة A بأنها قابلة للأقطرة إذا وجدت مصفوفة مثل P قابلة للانعكاس بحيث:

$$P^{-1}AP = D$$

حيث D مصفوفة قطرية. P تسمى مؤقطرة A.

مثال (1):

حول $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ إلى مصفوفة قطرية.

1. نوجد المعادلة المميزة.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 8 & \lambda - 4 & 6 \\ -8 & -1 & \lambda - 9 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 6 \\ 1 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6)(\lambda - 7)$$

2. المعادلة المميزة هي $(\lambda - 1)(\lambda - 6)(\lambda - 7) = 0$

عليه فإن القيم الذاتية هي: $\lambda_3 = 7, \lambda_2 = 6, \lambda_1 = 1$

3. بالتعويض في المعادلة $(\lambda I - A)X = 0$ واختزال المصفوفة الناتجة ومن ثم بحل النظام المتجانس نحصل على:

$v_1 = \begin{bmatrix} -15a/16 \\ -a/2 \\ a \end{bmatrix}$، حيث a كمية ثابتة.

4. وبنفس الطريقة نجد $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3b \\ -b \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2c \\ c \end{bmatrix}$

حيث c, b كميات ثابتة.

5. إذن عند تعويض $\lambda_i = 1$ نحصل على $v_1 = \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \\ -16 \end{bmatrix}$ بالتعويض عن 16- = a (لأن a كمية ثابتة ويمكن اختيارها 16−).

وعند التعويض عن $\lambda = 6$ والضرب في $c = 1$ نحصل على $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. وأخيراً

عند تعويض $\lambda = 7$ و $c = 1$ نحصل على المتجه الذاتي $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. بوضع الأعمدة v_3, v_2, v_1 بشكل صفوف نحصل على المصفوفة التالية:

$$P = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & -2 \\ -16 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بما أن P قابلة للانعكاس، نجد P^{-1} بإحدى الطرق التي تعلمناها في فصول سابقة.

7. وبالتعويض في العلاقة $P^{-1}AP$ سنحصل على (تأكد من ذلك)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن عناصر القطر الرئيسي في D هي القيم الذاتية للمصفوفة A كما وأن صفوف P هي المتجهات الذاتية v_3, v_2, v_1

مبرهنة (2-2-7):

إذا كانت A مصفوفة سعتها $n \times n$، فإن A قابلة للأقطرة إذا وفقط إذا احتوت على n من المتجهات الذاتية المستقلة خطيا وأن صفوف P هي المتجهات الذاتية المستقلة خطيا.

البرهان:

نفرض أن A تحوي على n من المتجهات الذاتية المستقلة خطيا $v_n, \dots, v_2, v_1$ المرافقة للقيم الذاتية $\lambda_n, \dots, \lambda_2, \lambda_1$.

لتكن
$$v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix}, \dots, v_n = \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{bmatrix}$$

و:
$$P = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

إذن P قابلة للانعكاس لأن أعمدتها مستقلة خطيا.

لذا فإن $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية لتكن D :
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

إذن $P^{-1}AP = D$، أي أن $AP = PD$.

$$PD = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{12} & \cdots & \lambda_n v_{1n} \\ \lambda_1 v_{21} & \lambda_2 v_{22} & \cdots & \lambda_n v_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 v_{n1} & \lambda_2 v_{n2} & \cdots & \lambda_n v_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= AP$$

لذا فإن أعمدة AP المتتالية هي: $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_b v_n$

إذن:

$$Av_i = \lambda_1 v_1 , A_{v2} = \lambda_2 v_2 \ldots , Av_n = \lambda_n v_n \ldots\ldots (2)$$

وبما أن P قابلة للانعكاس فإن متجهات الأعمدة جميعها غير صفرية، لذا من (2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ جميعها قيم ذاتية لـ A و $v_1, v_2, \ldots, v_n$ متجهاتها الذاتية المرافقة.

وبما أن P قابلة للانعكاس وبموجب مبرهنة (2-1-7) والملاحظة نهاية بند (2-6) ينتج أن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ مستقلة خطيا.

وبالعكس نفرض أن A تحتوي على n من المتجهات الذاتية المستقلة خطيا $v_1, v_2, \ldots, v_n$ المرافقة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ على التوالي. لتكن:

$$P = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة متجهات أعمدتها هي $v_1, v_2, \ldots, v_n$. من خواص ضرب المصفوفات فإن متجهات أعمدة AP هي:

$$Av_1, Av_2, \ldots, Av_n$$

لكن $Av_1 = \lambda_1 v_1 , Av_2 = \lambda_2 v_2, \ldots , Av_n = \lambda v_n$

لذا فإن:

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{12} & \cdots & \lambda_n v_{1n} \\ \lambda_1 v_{21} & \lambda_2 v_{22} & \cdots & \lambda_n v_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 v_{n1} & \lambda_2 v_{n2} & \cdots & \lambda_n v_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \quad \text{......................} \quad (3)$$

حيث D مصفوفة قطرية قيمها الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ بما أن متجهات أعمدة P مستقلة خطيا، فإن P قابلة للانعكاس بموجب (3) فإن $D = P^{-1}AP$، بمعنى آخر، A قابلة للأقطرة.

ويمكن تلخيص طريقة أقطرة المصفوفة A كما يأتي:

1. نجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A المستقلة خطيا، نسميها $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
2. نكون المصفوفة P التي متجهات أعمدتها هي $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
3. نجد معكوس P، أي P^{-1} ومن ثم نعوض في $P^{-1}AP$ والتي ستكون مصفوفة قطرية عناصرها في القطر الرئيسي هي: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية المرافقة للمتجهات الذاتية $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

مثال (2):

أوجد P التي تؤقطر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1. المعادلة المميزة هي:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

2. القيم الذاتية إذن هي: $\lambda_3 = 2 , \lambda_2 = 2 , \lambda_1 = 1$

3. عليه فإن $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ هو المتجه الذاتي المرافق لـ λ إذا وفقط إذا

$(\lambda I - A) X = 0$، أي أن:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{.......................} (4)$$

إذا كانت $\lambda = 2$ فإن (4) تصبح: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

بحل هنا النظام سنحصل على:

$x_3 = a \quad , \quad x_2 = b \quad , \quad x_1 = -a$

حيث b, a ثوابت.

إذن المتجهات الذاتية المرافقة لـ $\lambda = 2$ هي:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن هذه المتجهات مستقلة خطيا لذا فإنها تؤلف أساس للفضاء الذاتي المرافق.

وعندما $\lambda = 1$ فإن (4) تصبح:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام نحصل على:

$x_3 = a \quad , \quad x_2 = a \quad , \quad x_1 = -2a$

عليه فإن المتجهات الذاتية المرافقة لـ $\lambda = 1$ هي متجهات غير صفرية وبالشكل:

$$\begin{bmatrix} -2a \\ a \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذا فإن $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ أساس للفضاء الذاتي المرافق لـ $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -2a \\ a \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لهذا أصبح لدينا ثلاث متجهات هي الأساس وعليه فإن A قابلة للأقطرة

وكذلك $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، تؤقطر A

وإن:
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (3):

أوجد P التي تؤقطر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

القيم الذاتية لـ A هي (برهن ؟): $\lambda_1 = 1 , \lambda_2 = 5 , \lambda_3 = 5$ والمتجهات الذاتية المرافقة والمستقلة خطيا هي:

(تحقق من ذلك) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

عليه فإن:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

مبرهنة (3-2-7):

لتكن $v_1, v_2, \dots, v_n$ متجهات ذاتية للمصفوفة A المترافقة مع القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فإن $v_1, v_2, \dots, v_n$ مستقلة خطيا.

البرهان:

1. نفرض $m = 2$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \quad \text{..........} (5)$$

بضرب طرفي المعادلة (5) بالمصفوفة A نحصل على:

$$A(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 (Av_1 + c_2 Av_2) = 0$$

عليه:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \quad \text{..........} (6)$$

ويضرب (5) في λ_1 وطرحها من (6) نحصل على:

$$c_1 \lambda v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 - (c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_1 v_2) =$$
$$c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0$$

لكن $v_2 \neq 0$ و $\lambda_2 \neq \lambda_1$ فإن $c_2 = 0$ وعليه فإن $c_1 = 0$ (معادلة 1).

2. نفرض أن المبرهنة صحيحة عندما $m = k$ (بمعنى أن k من المتجهات الذاتية، مستقلة خطيا).

3. الآن نفرض $m = k + 1$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad \text{..........} (7)$$

ويضرب الطرفين في A وبموجب العلاقة $Av_i = \lambda v_i$ نحصل على:

$$c_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + c_k \lambda_k v_k + c_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad \text{..........} (8)$$

بضرب (7) في λ_{k+1} وطرح الناتج من (8) ينتج:

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) v_2 + \ldots + c_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = 0$$

لكن $v_1, v_2, \ldots, v_k$ مستقلة خطيا، فإن:

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = c_2 (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \ldots = c_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

$\lambda_i = \lambda_{i+1}$ حيث $(i = 1, 2, \ldots, k)$

إذن $c_1 = c_2 = \dots c_k$

وهذا يعني أن $c_{k+1} = 0$

مبرهنة (7-2-4):

إذا كانت $v_1, v_2, \dots, v_n$ متجهات ذاتية مرافقة للقيم الذاتيـة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فإن A قابلة للأقطرة.

البرهان:

بما أن $v_1, v_2, \dots, v_n$ متجـهات ذاتيـة فـإن مبرهنـة (7-2-3) تبـين لنـــا أن $v_1, v_2, \dots, v_n$ مستقلة خطيا. لذا فإن A قابلة للأقطرة حسب مبرهنة (7-2-2).

حساب قوى المصفوفة A:

لتكن A مصفوفة سعتها $n \times n$ و p مصفوفة قابلة للانعكاس فإن:

$$(p^{-1}Ap)^2 = p^{-1}App^{-1}Ap = p^{-1}AAp = p^{-1}A^2p$$

وبصورة عامة يمكن الحصول على الصيغة:

$$(p^{-1} Ap)^n = p^{-1}A^np \quad \dots\dots (9)$$

وإذا كانت A قابلة للأقطرة بحيث $p^{-1} Ap = D$ فإن:

$$p^{-1}A^np = (p^{-1}Ap)^n = D^n \quad \dots\dots (10)$$

أو:

$$A^n = pD^np^{-1} \quad \dots\dots (11)$$

مثال (4):

أوجد A^{10} حيث $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

الحل:

من المثال الثاني، المصفوفة التي تؤقطر A هي $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

وعليه فإن:

$$D = p^{-1}Ap = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبموجب (11):

$$A^{10} = pD^{10}p^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بعد ضرب المصفوفات نحصل على A^{10}.

تمارين (2-7)

1. أوجد p التي تحول A إلى مصفوفة قطرية. ثم أوجد $P^{-1}AP$

a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. أوجد A^5 حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. إذا كانت A قابلة للأقطرة والانعكاس فإن A^{-1} قابلة للأقطرة و P التي تؤقطر A تؤقطر A^{-1} كذلك.

4. افحص فيما إذا كانت المصفوفات الآتية قابلة للأقطرة أم لا. إذا كانت قابلة للأقطرة أوجد P التي تؤقطر A، أوجد $P^{-1}Ap$.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

7-3 الأقطرة المتعامدة:

الهدف الأساسي لهذا البند هو في الإجابة على تساؤلين اثنين أولهما هو في إثبات أن التعبيرين الآتين متكافئتين. التعبير الأول هو إذا كانت A مصفوفة سعتها $n \times n$. هل يمكن إيجاد أساس عياري متعامد للفضاء R^n المعرف عليه الضرب المباشر الداخلي الإقليدي، متكون من المتجهات الذاتية لـ A. أما التعبير الثاني هو هل توجد مصفوفة متعامدة مثل p بحيث $p^{-1}Ap = p^TAp$ قطرية، وإذا وجدت مثل هذه المصفوفة فإن A يقال لها مصفوفة قابلة للأقطرة تعامديا و p تسمى المصفوفة التي تؤقطر A تعامديا.

التساؤل الثاني هو أي مصفوفة يمكن أقطرتها تعامديا وكيفية إيجاد مصفوفة متعامدة يمكن استخدامها في الأقطرة.

مبرهنة (7-3-1): إذا كانت A مصفوفة سعتها $n \times n$ فإن التعابير الآتية متكافئة:

1. A قابلة للأقطرة تعامديا.
2. A تحتوي على مجموعة n من المتجهات الذاتية العيارية المتعامدة.
3. A مصفوفة متناظرة (أي $A^T = A$).

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$: لما كانت A قابلة للأقطرة التعامدية فإنه توجد مصفوفة متعامدة مثل p بحيث $p^{-1}Ap$ قطرية. عليه فإن متجهات أعمدة p التي عددها n هي المتجهات الذاتية للمصفوفة A [لاحظ برهان مبرهنة (7-2-2)]. بما أن p متعامدة فإن متجهات الأعمدة هذه هي عيارية متعامدة [لاحظ مبرهنة (6-4-2)]. لذا فإن A تحتوي على n من المتجهات الذاتية العيارية المتعامدة.

$2 \Leftarrow 1$: لتكن $\{v_1, _2, \dots, v_n\}$ هي المتجهات الذاتية العيارية المتعامدة التي عددها n. بموجب برهان المبرهنة (7-2-2) فإن المصفوفة p التي أعمدتها هي

المتجهات الذاتية هذه تؤقطر A. وبما أن هذه المتجهات هي عبارية، لذا فإن p متعامدة ولذلك فهي تؤقطر A تعامديا.

$1 \Leftarrow 3$: لاحظنا من $1 \Leftarrow 2$ إن المصفوفة A ذات السعة $n \times n$ القابلة للأقطرة تعامديا مؤقطرة تعامديا بواسطة المصفوفة p ذات السعة $n \times n$ والتي أعمدتها تؤلف مجموعة عيارية متعامدة من متجهات A الذاتية.

نفرض $p^{-1}Ap = D$ حيث D مصفوفة قطرية. لذا:

$$A = pDp^{-1}$$

ولكن p متعامدة، لذا فإن:

$$A = PDP^{T}$$

عليه:

$$A^{T} = (pDp^{T}) = pD^{T}p^{T} = pDp^{T} = A$$

إذن A متناظرة.

$3 \Leftarrow 1$ يترك البرهان لأنه يحتاج لمواضيع خارج نطاق هذا الكتاب.

خواص المصفوفة المتناظرة:

نفرض A مصفوفة متناظرة.

1. المتجهات الذاتية للمصفوفة A جميعها أعداد حقيقية.
2. المتجهات الذاتية المأخوذة من فضاءات ذاتية مختلفة تكون متعامدة.

طريقة أقطرة المصفوفة المتناظرة عموديا.

1. نجد أساس كل فضاء ذاتي لـ A.
2. استخدام طريقة كرام - سمث لكل من هذه الأساسات لإيجاد الأساس العياري المتعامد لكل فضاء ذاتي.
3. كون p التي أعمدتها متجهات الأساس الناتج من الفقرة (2)
4. المصفوفة p هذه تؤقطر A تعامديا.

مثال (1):

أوجد المصفوفة المتعامدة التي تؤقطر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

بما أن A متناظرة فإن معادلتها المميزة هي:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -2 \\ -4 & \lambda-5 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10) = 0$$

عليه فالقيم الذاتية هي $\lambda_3 = 10, \lambda_2 = 1, \lambda_1 = 1$.

باعتماد طريقة إيجاد المتجهات الذاتية الواردة في البند (1-7) نحصل على:

$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ وهي المتجهات الذاتية المرافقة لـ $\lambda = 1$.

كذلك هي أساس الفضاء الذاتي المرافق لـ $\lambda = 1$.

كما وأن:

$v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو المتجه الذاتي المرافق لـ $\lambda = 10$.

نوجد p باستخدام طريقة كرام - سمث على $\{v_1, v_2\}$.

لما كان $\|v_1\| = \sqrt{2}$ فإن $u_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

وبنفس الطريقة $\|v_2\| = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

إذن $u_2 = \frac{2}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/3\sqrt{2}\\-1/3\sqrt{2}\\4/3\sqrt{2}\end{bmatrix}$

وأخيرا نستخدم طريقة كرام - سمث على أساس الفضاء الذاتي $\{v_3\}$.

$$\|v_3\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$u_3 = \frac{1}{3}v_3 = \begin{bmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}$$

ملاحظة:

حقق صحة الحل.

عليه فإن:

$$p = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3\\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3\\ 0 & 4/3\sqrt{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

كما وأن

$$p^{-1}Ap = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

لاحظ أن u_1, u_2, u_3 هي متجهات ذاتية عيارية متعامدة.

مثال (2):

أوجد المصفوفة المتعامدة التي تؤقطر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)^2 (\lambda - 8) = 0$$

وهي عبارة عن المعادلة المميزة.

إذن القيم الذاتية هي: $\lambda_3 = 8, \lambda_2 = 2, \lambda_1 = 2$.

وبموجب طريقة بند (7-1) فإن المتجهات الذاتية:

$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ التي تشكل أساس الفضاء الذاتي

المرافق لـ $\lambda = 2$.

كذلك عندما $\lambda = 8$ فإن المتجه الذاتي المرافق لـ $\lambda = 8$ هو $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

والذي يكون أساس الفضاء الذاتي المرافق لـ $\lambda = 8$.

بموجب كرام - شمث نحصل على:

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, u_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وإذا أخذنا u_3, u_2, u_1 كمتجهات أعمدة فنحصل على:

$$p = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{16} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

والتي تؤقطر A تعامديا.

عليه:

$$p^T A p = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

تمارين (3-7)

1. أوجد أبعاد الفضاءات الذاتية لكل مما يأتي:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

2. أوجد المصفوفة p التي تؤقطر عموديا A ثم أوجد $p^{-1}Ap$

a. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. لتكن c مصفوفة متناظرة عموديا. بين إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ C، فإن $\lambda = \pm 1$

4. أوجد A^4 عندما $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5. برهن إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة فإن $b = \mp c$

6. إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن A و A^T لهما نفس القيم الذاتية.



الفصل الثامن



التحويلات الخطية العامة

الفصل الثامن

التحويلات الخطية العامة

8-1 التحويلات الخطية العامة:

سبق وأن درسنا في فصول سابقة التحويلات الخطية من R^n إلى R^m في هذا البند سنتعرف على التحويلات الخطية من الفضاء العام V إلى الفضاء العامW. لهذا النوع من التحويلات تطبيقات مهمة في مختلف فروع الرياضيات والعلوم التطبيقية كالفيزياء والهندسة وغيرها.

تعريف (8-1-1):

الدالة T من فضاء المتجهات V إلى فضاء المتجهات W، تكتب $T : V \rightarrow W$، يقال لها تحويلة خطية من V إلى W إذا تحققت الشروط الآتية:

(1) $T(v + u) = T(v) + T(u)$.

(2) $T(kv) = k\,T(v)$

لكل $v, u \in V$ ولكل k عدد ثابت.

عندما $V = W$ فإن T تسمى عملية خطية على V.

مثال (1):

التحويلات الخطية التي سبق وأن درسناها من R^n إلى R^m هي تحويلات خطية وتحقق الشرطين. هذه التحويلات تسمى تحويلات المصفوفة.

مثال (2):

التطبيق $T = V \to W$ المعرف بـ $T(v) = 0$ لكل $v \in V$ هو تحويلة خطية تسمى التحويلة الصفرية وذلك لأن:

(1) $T(v + u) = 0 = 0 + 0 = T(v) + T(u)$ لكل $v, u \in V$.

(2) $T(kv) = 0 = k \cdot 0 = k\,T(v)$ لكل $v \in V$ و k ثابتة.

مثال (3):

التطبيق $I: V \to W$ حيث V فضاء متجهات والمعرف بالشكل $I(v) = v$ لكل $v \in V$ هو تحويلة خطية تسمى العملية الخطية الأحادية وذلك لأن:

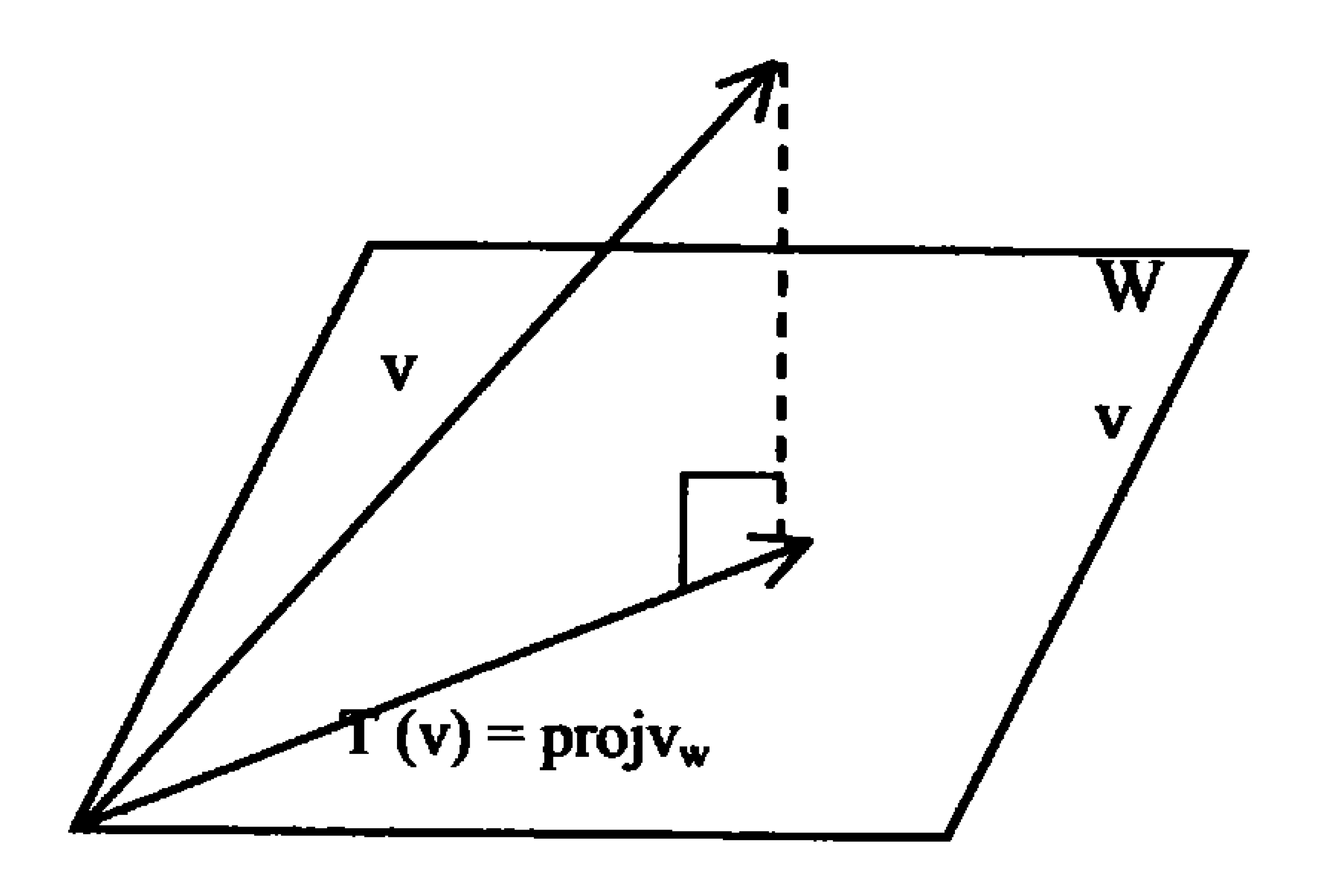
(1) $I(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = I(v_1) + I(v_2)$ لكل $v_1, v_2 \in V$.

(2) $I(kv) = kv = k\,I(v)$ لكل $v \in V$ و k ثابتة.

مثال (4):

ليكن V فضاء متجهات و k عدد ثابت، فإن الدالة المعرفة بالشكل $T(v) = kv$ لكل $v \in V$، تحويلة خطية لأن

$$T(kv_1 + kv_2) = k(v_1 + v_2)$$
$$= kv_1 + kv_2$$
$$= T(v_1) + T(v_2)$$



شكل (1-8)

هذه التحويلة تسمى:

1. تمدد عندما $k > 1$.
2. انكماش عندما $0 < k < 1$.

مثال (5):

ليكن W فضاء جزئي ذات بعد منتهي من فضاء الضرب الداخلي V فإن المسقط العمودي T من V إلى W المعرف بالشكل $T(v) = proj_w v$ لكل $v \in V$ هو تحويلة خطية لاحظ الشكل (1-8).

الحل:

بموجب المبرهنة (5-3-6) نستطيع القول أنه إذا كان

$S = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$

أساس عياري متعامد للفضاء W فإن T يمكن تعريفها بالشكل:

$$T(v) = proj_w\, v$$

$$= \langle v, w_1\rangle w_1 + \langle v, w_2\rangle w_2 + \dots + \langle v, w_k\rangle w_k$$

هذه الصيغة هي تحويلة خطية لأن:

$$T(v+u) = \langle v+w, w_1\rangle w_1 + \langle v+u, w_2\rangle w_2 + \dots + \langle v+u, w_k\rangle w_k$$

$$= \langle v, w_1\rangle w_1 + \langle v, w_2\rangle w_2 + \dots + \langle v, w_k\rangle wk + \langle u, w_1\rangle w_1 + \langle u, w_2\rangle w_2 + \dots \langle u, w_k\rangle w_k$$

$$= T(v) + T(u)$$

2. بنفس الطريقة

$$T(kv) = k\,T(v)$$

مثال (6):

لتكن V فضاء متجهات بعدة n و $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ أساس V.
خذ $v \in V$ بحيث: $(v)_s = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ هو متجه إحداثي للمتجه v نسبة لـ S.

لذا فإن $v = k_1w_1 + k_2w_2 + \dots + k_nw_n$

فإذا عرفت T بالشكل: $T: V \to R^n$ بحيث:

$$T(v) = (v)_s = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

فإن T تحويلة.

الحل:

نفرض:

$$v = b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_nw_n$$

$$u = c_1w_1 + c_2w_2 + \dots + c_nw_n$$

حيث $v, u \in V$

لهذا:

$$(v)_s = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$(u)_s = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

بما أن:

$$v + s = (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) + \dots + (b_n + c_n)$$

و:

$$(kv)_s = k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_nb_n$$

لهذا:

$$(v + u)_s = (v)_s + (u)_s$$

$$(kv)_s = k\,(v)_s$$

أي أن:

$$T\,(v + u) = T\,(v) + T\,(u)$$

$$T\,(kv) = k\,T\,(v)$$

إذن T تحويلة.

مثال (7):

لتكن $T: P_n \rightarrow P_{n+1}$ و $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ حيث $f(x) \in P_n$

نعرف T:

$$T\,[f(x)] = x\,f(x)$$

$$T\,[f(x)] = a_0x + a_1x^2 + \dots + a_nx^{n+1}$$

إذن T تحويلة لأن:

$$1.\ T\,[f_1(x) + f_2(x)] = x\,[f_1(x) + f_1(x)]$$

$$= x\,f_1(x) + x\,f_2(x)$$

$$= T[f_1(x)] + T[f_2(x)]$$

$$2.\ T[k f(x)] = x[k(f(x)] = k[x f(x)]$$

$$= k T[f(x)]$$

مثال (8):

نفرض $T: M_n \to R$ دالة من مجموعة جميع المصفوفات ذات السعة $n \times n$ إلى مجموعة محدداتها والمعرفة:

$$T(A) = \det(A)$$

عليه فإن T ليست تحويلة وذلك لأن:

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

و:

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

عليه فإن

$$\det(kA) \neq k \det(A)$$

ملاحظة:

يمكن تعميم شروط التعريف (1-1-8) بالشكل:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n)$$

لكل $v_1, v_2, \dots, v_n$ في V و $a_1, a_2, \dots, a_n$ ثوابت.

خواص التحويلات الخطية:

لتكن $T: V \to W$ تحويلة خطية فغن

1. $T(0) = 0$ حيث $0 \in V$.
2. $T(-v) = -T(v)$ لكل $v \in V$.
3. $T(v - u) = T(v) - T(u)$ لكل $v, u \in V$.

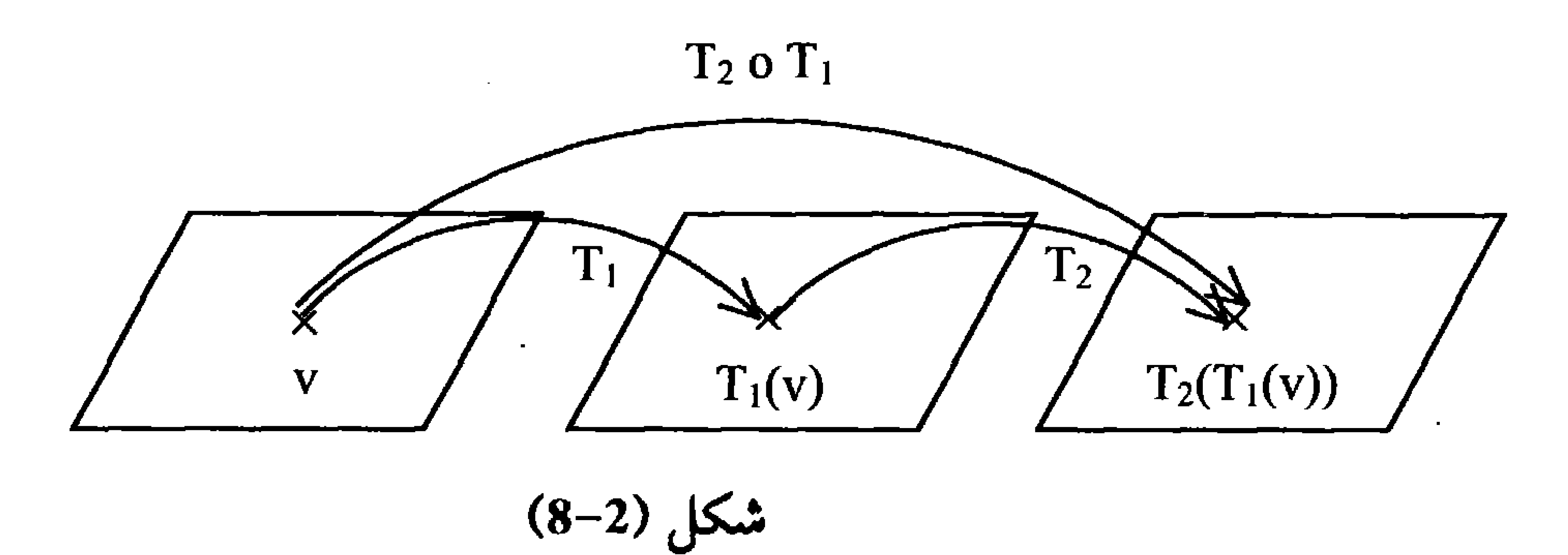
تمرين: ممكن برهان الخواص أعلاه وبسهولة جرب ذلك.

تعريف (8-1-2):

لتكن $T: V \rightarrow U$ و $T_2: U \rightarrow W$ تحويلات خطية فإن تركيبهما، يكتب $T_2 \circ T_1$، هو دالة معرفة بالشكل:

$$(T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v))$$

حيث $v \in V$.



شكل (2-8)

الشكل الهندسي للتركيب $T_2 \circ T_1$

مبرهنة (3-1-8):

تركيب التحويلات الخطية هو تحويل خطي.

البرهان:

نفرض $T_1: V \to U$ و $T_2: U \to W$ تحويلات خطية. بموجب التعريف (2-1-8) نحصل على:

$$T_2 \circ T_1 (v + u) = T_2 [T_1 (v + u)] = T_2 [T_1 (v) + T_1 (w)]$$

$$= T_2 (T_1 (v)) + T_2 (T_1 (u))$$

$$= T_2 \circ T_1 (v) + T_2 \circ T_1 (u)$$

$$T_2 \circ T_1 (kv) = T_2 (T_1 (kv)) = T_2 (kT_1 (v))$$

$$= kT_2 (T_1(v)) = k (T_2 \circ T_1) (v)$$

إذن $T_2 \circ T_1$ تحويلة خطية.

مثال (9):

لتكن $T_1: p_1 \rightarrow p_2$ و $T_2 = p_2 \rightarrow p_2$ تحويلات خطية معرفتان بالشكل:

$$T_2 (f(x)) = f(x+2) \;,\; T_1 (f(x)) = x\, f(x)$$

وتركيبهما معرف: $T_2 \text{ o } T_1 : p_1 \rightarrow p_2$ سيكون بالشكل:

$$T_2 \text{ o } T_1 (f(x)) = T_0 (T_1 f(x)) = T_2 (x\, f(x)) = (x+2)\, f(x+2)$$

وعندما نفرض بشكل خاص أن $f(x) = a_0 + a_1 x$ فإن:

$$T_2 \text{ o } T_1 (f(x) = (T_2 \text{ o } T_1)(a_0 + a_1 x)$$

$$= (x+2)\,[a_0 + a_1 (x+2)]$$

$$= a_0 (x+2) + a_1 (x+2)^2$$

ملاحظة:

يمكن تعميم تركيب التحويلات لأكثر من تحويلتات [لاحـظ الشـكل الهندسـي (3-8)].

$$(T_3 \text{ o } T_2 \text{ o } T_1)(v) = T_3 [T_2 (T_1 (v))]$$

شكل (3-8)

تركيب ثلاث تحويلات خطية

تمارين (8-1)

1. إذا كانت الدالة $T: R^2 \to R^2$ معرفة بالأشكال الآتية. بين فيما إذا كانت T خطية أم لا مبيناً السبب.

a. $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

b. $T(x, y) = (y, x - 1)$

c. $T(x, y) = (0, 1)$

2. هل أن عملية التفاضل تشكل تحويلاً خطياً.

3. لتكن $T: R \to P_2$ معرفة بالشكل:

$$T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$$

هل أن T تحويلة خطية أم لا.

4. إذا كانت $T: V \to R$ عملية معرفة بالشكل $T(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $v \in V$ و V فضاء متجهات للدوال المستمرة الحقيقية على الفترة $a \le x \le b$ بين هل أن T تحويلة أم لا.

5. لتكن V فضاء متجهات لمجموعة المصفوفات المربعة على R و T معرفة $T: V \to R$ حيث $T(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$

برهن أن T تحويلة خطية. لاحظ أن $A = (a_{ij})$.

6. نفرض $T: R^2 \to R^2$ تحويلة خطية (عملية) بحيث $T(v_1)=(-2, 1)$, $T(v_2)=(-4, 1)$ و $v_1 = (1, 1)$ و $v_2 = (1, 0)$ وكذلك $S = \{v_1, v_2\}$ أساس R^2.

أوجد صيغة $T(x, y)$ واستخدمها لإيجاد $T(2, -3)$.

7. لتكن $T_1: P_2 \to P_2$ و $T_2: P_2 \to P_3$ تحويلتـان خطيتـان معرفتـان بالشـكل $T_1(f(x)) = f(x+1)$ و $T_2(f(x)) = x f(x)$. أوجد:

$$(T_2 \circ T_1)(a_0 + a_1x + a_2x^2)$$

8. أوجـد $(T_1 + T_2)(x, y)$ و $(T_1 - T_2)(x, y)$ إذا كـانت $T_1: R^2 \to R^2$ و $T_2 = R^2 \to R^2$ والمعرفتان:

$$T_2(x, y) = (y, x) \quad , \; T_1(x, y) = (2x, 3y)$$

8-2 النواة والمدى:

يهدف هذا البند إلى اسـتنتاج بعـض الصفـات الأساسـية للتحويـلات الخطيـة العامة.

مبرهنة (8-2-1):

لتكن $T: V \to W$ تحويلة خطية، فإن مجموعة جميع المتجـهات في V الـتي صـورة كل منها بواسطة T تساوي صفر تسمى نواة T وتكتب Ker T (kernel T). أما مجموعـة جميع المتجهات في W والتي هي عبارة عن صورة لعلى الأقل متجه واحـد في V بواسـطة T، تسمي مدى T، وتكتب Im (T) (Image T).

يمكن تعريف كل من ker (T) و Im (T) جبرياً على النحو الآتي:

$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

$$Im(T) = \{w \in W : \exists\, v \in V;\, T(v) = w\}$$

مثال (1):

لتكن $T: R^3 \to R^3$ تطبيق إسقاطي والمعرف بالشكل:

$$T(x, y, z) = (x, y, 0)$$

أوجد ker T و Im T

الحل:

واضح أن النقاط على المحور z تكون صورتها بواسطة T هي المتجه الصفري 0

لذا فإن $\ker(T) = \{(0, 0, c): c \in R\}$.

أما صورة T فتتكون من جميع النقاط في المستوى xy، أي،

$$Im(T) = \{(a, b, 0): a, b \in R\}$$

مثال (2):

لتكن $T: V \to W$ تطبيق خطي فإن $\ker(T)$ فضاء جزئي في V و $Im(T)$ فضاء جزئي في W.

الحل:

بما أن $T(0) = 0$ فإن $0 \in \ker T$ (أي أن $\ker T$ غير خالية).

نفرض $v, u \in \ker T$، إذن $T(v) = 0$ و $T(u) = 0$. لذا فإن:

$$T(av + bu) = a\,T(v) + b\,T(u)$$

$$= a.0 + b.0 = 0 + 0 = 0$$

إذن $\ker T$ فضاء جزئي في V.

وبما أن $T(0) = 0$ فإن $0 \in Im\,T$، عليه فإلإن $Im\,T$ غير خالي

نفرض $w_1, w_1 \in ImT$ عليه:

بما أن $w_1 \in Im\,T$ فإنه يوجد $v_1 \in V$ بحيث $T(v_1) = w_1$

و $w_2 \in Im\,T$ فإنه يوجد $v_2 \in V$ بحيث $T(v_2) = w_2$.

إذن:

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2)$$

$$= T(v_1 + v_2)$$

إذن $w_1 + w_2 \in Im\,V$

وبنفس الطريقة شرط الضرب.

مثال (3):

لتكن $T: R^4 \rightarrow R^3$ تحويلة خطية معرفة بالشكل:

$$T (x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 25 - t, x + y + 35 - 3t)$$

أوجد أساس وبعد صورة T.

الحل:

نوجد صور المتجهات الطبيعية للفضاء R^4.

$$T (1,0,0,0) = (1, 1, 1)$$

$$T (0,1,0,0) = (-1, 0, 1)$$

$$T (0,0,1,0) = (1, 2, 3)$$

$$T (0,0,0,1) = (1, -1, -3)$$

عليه فإن متجهات صور T تنشأ Im (T) (صورة T). بوضع هذه المتجهات بشكل صفوف وبموجب الشكل المدرج الصفي المختزل نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا فإن: $\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$ أساس Im (T).

عليه فإن بعد Im (T) هو 2.

مثال (4):

أوجد أساس وبعد ker (T) للتحويلة الخطية في المثال 3.

الحل:

نفرض $T (v) = 0$ حيث $v = (x, y, s, t)$

أي:

$$T(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2 - t, x + y + 35 - 3t) = (0, 0, 0)$$

وبمقارنة مركبات المتجهات لطرفي المعادلة أعلاه نحصل على:

$$x - y + s + t = 0$$

$$y + s - 2t = 0$$

حيث t, s هي المتغيرات الحرة، لذا فإن بعد النواة هو 2.

وبإعطاء قيم لأعلى التعين لـ t, s كالآتي:

عندما $s = -1$ و $t = 0$ نحصل على الحل: $(2, 1, -1, 0)$

وعندما $s = 0$ و $t = 1$ نحصل على الحل: $(1, 2, 0, 1)$.

لذا فإن: $\{(2, 1, -1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ هو أساس $\ker(T)$.

لقد عرفنا في البند (5-6) رتبة المصفوفة بأنه بعد فضاء أعمدتها وصفرية المصفوفة بأنها بعد فضائها الصفري. سنحاول الآن تعميم هذه التعاريف على التحويلات الخطية العامة.

تعريف (8-2-2):

لتكن $T: V \rightarrow W$ تحويلة خطية فإن:

1. بعد مدى T يقال له رتبة T ويكتب $\text{rank}(T)$.
2. بعد نواة T يقال له صفرية T ويكتب $\text{null}(T)$.

مبرهنة (8-2-3):

إذا كانت A مصفوفة سعتها $m \times n$ و $T_A: R^n \rightarrow R^m$ مضروبة A فإن:

1. صفرية (T_A) = صفرية (A).
2. رتبة (T_A) = رتبة (A).

البرهان:

لما كانت A سعتها $m \times n$ و $T_A: R^n \to R^m$ مضروبة A وبموجب المناقشات في الفصول السابقة فإن نواة T_A هي فضاء A الصفري.

ومدى T_A هو فضاء أعمدة A.

مثال (5):

لتكن $T_A: R^4 \to R^4$ مضروبة A . أوجد رتبة وصفرية T_A

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

من المثال 8 بند (5-6) وجدنا أن رتبة A هي 3 وصفرية A هي 1. لهذا وبموجب مبرهنة (8-2-3) نحصل على

رتبة T_A هي 3 وصفرية T_A هي 1.

مبرهنة (8-2-4):

لتكن $T: V \to W$ تحويلة خطية من فضاء المتجهات الذي بعده n إلى فضاء المتجهات W فإن:

$n = T$ صفرية $+ T$ رتبة .... (1)

أو:

$n = \text{rank}(T) + \text{null}(T)$

أو:

$n = T$ بعد نواة $+ T$ بعد مدى

البرهان: غير مطلوب.

مثال (6):

من الأمثلة 3 و 4 وجدنا أن بعد مدى T هو 2 وبعد نواة T هو 2 وبموجب مبرهنة (4-2-8) نجد أن:

رتبة T + صفرية T = 2 + 2 = 4 وهذه تساوي بعد منطلق T.

مثال (7):

من المثال (1) وجدنا أن بعد مدى T هو 1 وبعد نواتها هو 2 لذا فإن:

3 = 1 + 2 وهو عبارة عن بعد منطلق T.

أي أن:

رتبة T + صفرية T = رتبة منطلق T.

تمارين بند (8-2)

1. لتكن $S = \{v_1, v_2\}$ أساس R^2، حيث $v_1 = (-2, 1)$ و $v_2 = (1, 3)$. T تحويلة خطية معرفة $T: R^2 \to R^3$ بحيث $T(v_1) = (-1, 2, 0)$ و $T(v_2) = (0, -3, 5)$ اوجد صيغة $T(x_1, x_2)$ واستخدمها لإيجاد $T(2, -3)$.
2. لتكن $T: V \to W$ تحويلة خطية معرفة بالشكل $T(v) = \{0\}$ لكل $v \in V$ أوجد $\ker T$ و $\text{Im}\, T$.
3. إذا كانت $T: V \to W$ تحويلة خطية معرفة $T(v) = v$ لكل $v \in V$ أوجد $\ker T$ و $\text{Im}\, T$.
4. لتكن $T: R^2 \to R^3$ معرفة بالشكل:

$$T(x, y, z) = (x - y, 0, x - z)$$

احسب $\text{kert}\, T$ و $\text{Im}\, T$.

5. برهن أن الدالة $T: R^2 \to R^2$ المعرفة $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$ عملية خطية.
6. لتكن $T: P_2 \to P_2$ المعرفة $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$ برهن هل أن T عملية خطية أم لا.
7. إذا كانت $T: V \to R^3$ تحويلة خطية معرفة بالشكل $T(v_1) = (1, -1, 2)$ و $T(v_2) = (0, 3, 2)$ و $T(v_3) = (-3, 1, 2)$ حيث $v_1, v_2, v_3 \in V$.

أوجد: $T(2v_1 - 3v_2 + 4v_3)$

8. لتكن $T_1 : P_2 \to P_2$ و $T_2: P_2 \to P_3$ المعرفتان بالشكل:

$T_1[p(x)] = p(x + 1)$, $T_2[p(x)] = x\,p(x)$ أوجد $(T_2 o T_1)(a_0 + a_1x + a_2x^2)$

8-3 معكوس التحويلات الخطية:

سنعمم في هذا البند المفاهيم الواردة في الفصل الرابع بند (2-4) الخاصة بالتحويلات الخطية $T = R^n \to R^m$ على التحويلات الخطية العامة.

تعريف (8-3-1):

يقال التحويلة $T: V \to W$ بأنها متباينة وتكتب (1, -1) أو (one -to - one)، إذا كان كل متجه في المدى W هو صورة لمتجه واحد فقط في المنطلق V.

يمكن التعبير عن خاصية التباين جبرياً بالشكل:

إذا كانت $T(v_1) = T(v_2)$ فإن $v_1 = v_2$ لكل $v_1, v_2 \in V$.

خواص التحويلات الخطية $T: V \to W$:

لتكن $T: V \to W$ تحويلة خطية فإن الخواص الآتية متكافئة:

1. T متباينة.
2. نواة T تحتوي على المتجه الصفري فقط. أي أنها تحتوي على المتجه الصفري فقط. أي أن $\ker T = \{0\}$
3. صفرية T تساوي صفر. أي $\text{null}(T) = 0$

من السهولة برهان أن الخواص الثلاثة متكافئة. فإذ فرضنا أن T متباينة و $v \in \ker T$ فإن $T(v) = 0$ ولكن $T(0) = 0$ فإن $v = 0$ (لأن T متباينة) وعليه فإن نواة T تتكون من عنصر واحد هو العنصر الصفري [أي $\ker T = \{0\}$].

نفرض الآن أن $\ker T = \{0\}$ و $T(v_1) = T(v_2)$

$T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2)$ [لان $v_1, v_2 \in \ker T$]

إذن $T(v_1 - v_2) = 0$

عليه $v_1 - v_2 \in \ker T$ ومن هذا نستنتج أن T متباينة.

إذن (1) تكافئ (2) و (2) تكافئ (1).

نفرض (2) صحيحة. أي، $\ker(T) = \{0\}$.

لما كان $\ker T$ تحتوي على العنصر الصفري فإن بعد صفرية T يساوي صفر.

والآن نفرض (3) صحيحة. أي، صفرية T تساوي صفر، بمعنى آخر

$\text{null}(T) = 0$ لذا فإن بعد نواة T يساوي صفر.

عليه فإن $\ker(T)$ يحتوي فقط على المتجه الصفري.

مثال (1):

لتكن $T_A: R^4 \to R^4$ مضروبة
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

أوجد بعد المدى وبعد نواة T_A

الحل:

الشكل المدرج الصفي المختزل للمصفوفة A هي:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لإيجاد $\text{null}(A)$ يجب أن نوجد بعد فضاء الحل للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ وبحل هذا النظام باختزال المصفوفة الممتدة للشكل المدرج الصفي المختزل، سنحصل على المعادلات الآتية

$$x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 = 0$$

وبحل المعادلات أعلاه سنحصل على الحل العام للنظام وهو:

$x_2 = 2r + 12s + 16t - 5u$, $x_3 = r$, $x_4 = 5$, $x_5 = t$, $x_6 = u$

و $x_1 = 4r + 28s + 16t - 5u$

أو:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن المتجهات الأربعة هي أساس فضاء الحل. لذا فإن $\text{rank}(A) = 2$ و $\text{null}(A) = 4$ وبموجب المبرهنة (3-2-8) فإن $\text{rank}(T_A) = 2$ و $\text{null}(T_A) = 4$

مثال (2):

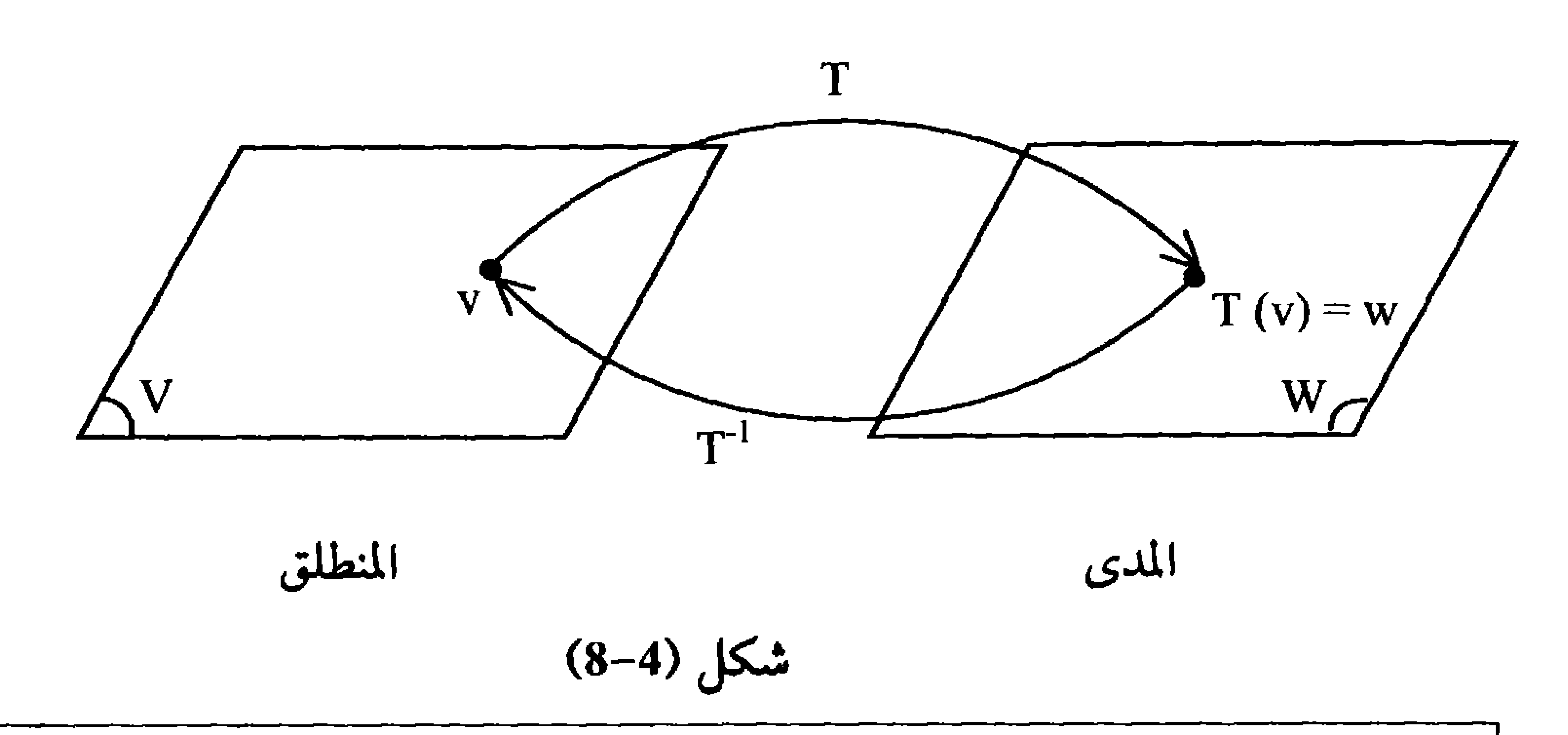
لتكن $T_A: R^4 \to R$ مضروبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

فإن T_A ليست متباينة لأن A غير قابلة للانعكاس وذلك لأن محددها يساوي صفر لكون الصفين الأول والثاني أحدهما مضروب الآخر.

معكوس التحويلة الخطية العامة:

سبق وأن عرفنا معكوس العملية الخطية (للفصل الرابع) المتباينة $T_A = R^n \to R^n$ ولاحظنا أنه إذا كانت W هي صورة v تحت تأثير T_A فإن T_{A-1} تعيد صورة w إلى v. سنحاول تعميم هذه الأفكار على العمليات الخطية العامة.

فإذا كانت $T: V \to W$ تحويلة خطية فإن مدى T هو فضاء جزئي من W يتكون من جميع صور المتجهات في V تحت تأثير T. إذا كانت T متباينة فإن كل متجه v في V يمتلك صورة وحيدة $w = T(v)$ في مدى T. وحدانية الصورة هذه تساعدنا في تعريف معكوس T، يكتب T^{-1}، التي تعيد الصور w إلى v، لاحظ الشكل (4-8).



المنطلق　　　　　　　المدى

شكل (4-8)

تمرين (1): برهن أن $T^{-1}: ImT \to V$ تحويلة خطية.

تمرين (2): برهن أن

a. $T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(w) = v$

b. $T(T^{-1}(w)) = T(v) = w$

أي أن كل من T و T^{-1} تختزل أحداهما الأخرى.

مثال (3):

لتكن $T: P_n \to P_{n+1}$ تحويلة خطية معرفة بالشكل:

$$T[p(x)] = xp(x)$$

حيث $P(x)$ متعددة حدود من الدرجة n أوجد T^{-1}

الحل:

واضح أن T متباينة وعليه فإن T لها معكوس. كذلك:

$$T\,(a_0x + a_1x^2 + \dots + a_nx^{n+1}) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

لذا فإن $T^{-1} = \text{rang}\,(T) \to P_n$

أي

$$T^{-1}\,(a_0x + a_1x^2 + \dots + a_nx^{n+1}) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^{-n}$$

مثال (4):

إذا كانت $T: R^3 \to R^3$ تحويلة خطية معرفة بالشكل

$$T\,(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, -2x_1 - 4x_2 + 2x_3, 5x_1 + 4x_2 - 2x_3)$$

أوجد T^{-1}.

الحل:

مصفوفة T هي $[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

هذه المصفوفة قابلة للانعكاس وأن المصفوفة المرافقة لـ T^{-1} هي:

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

عليه:

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = [T^{-1}]\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -11x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ -12x_1 + 7x_2 + 10x_3 \end{bmatrix}$$

أو:

$$T (x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 11x_1 + 6x_2 + 9x_3, -12x_1 + 7x_2 + 10x_3)$$

تمارين بند (3-8)

1. بين أن التحويلة $T: R^2 \to R^2$ والمعرفة $T(x, y) = (x - 2y, x + y)$ تحويلة خطية وأوجد معكوسها.
2. لتكن $T: R^2 \to R^2$ عملية خطية معرفة بالشكل $T(x, y) = (-x, y)$ أوجد:

   a. نواة T.   b. هل أن متباينة.
3. هل أن $T: R_2 \to P_3$ والمعرفة $T(a_1x + a_2x^2) = x(a_0 + a_1x + a_2x^2)$ متباينة أم لا؟ برهن ذلك.
4. إذا كانت $T: R^3 \to R^3$ مضروبة A. بين فيما إذا كانت T لها معكوس أم لا، وإذا كانت لها معكوس أوجد $T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
5. نفرض $T_1: P_2 \to P_3$ و $T_2: P_3 \to P_3$ تحويلات خطية معرفة بالشكل:

   $T_1(p(x)) = xp(x)$, $T_2(p(x)) = p(x + 1)$

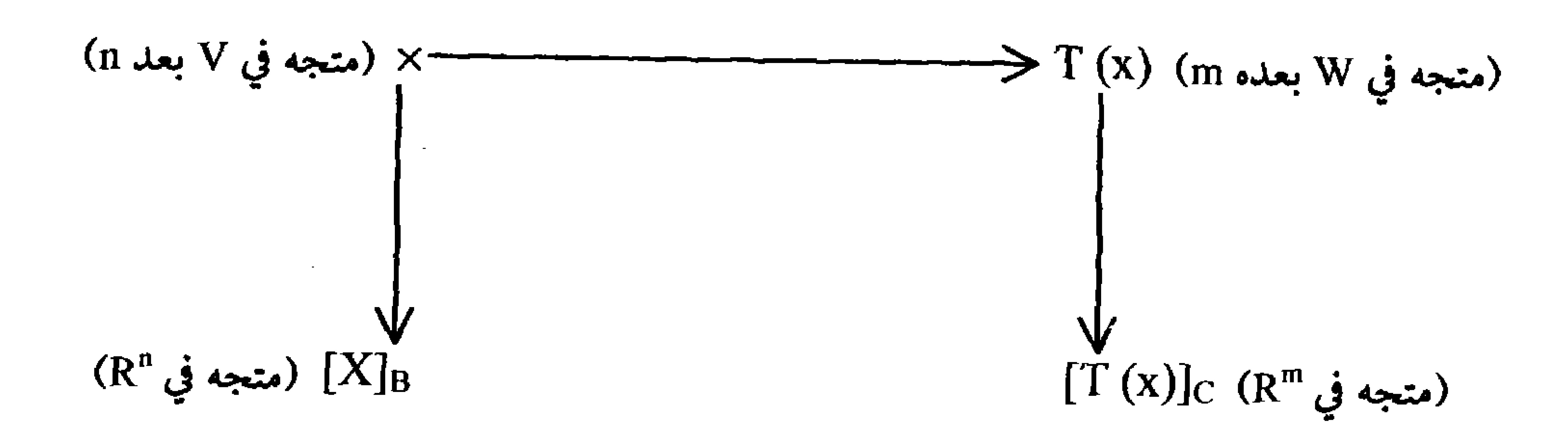
   أوجد:

   a. $T_1^{-1}(p(x))$ b. $T_2^{-1}(p(x))$

8-4 التحويلات الخطية العامة والمصفوفات:

في هذا البند سنبين أنه إذا كانت V و W فضاءات متجهات وذات أبعاد منتهية ليس ضرورياً أن يكونا R^n أو R^m، فإن أي تحويل خطي $T: V \rightarrow W$ يمكن اعتباره تحويل مصفوفي. إن الفكرة الأساسية هي في اختيار أساسات للفضاءات V و W والتعامل معها على أساس كونها إحداثية للمتجهات عوضاً عن المتجهات نفسها.

نفرض أن بعد V هو n وبعد W هو m وكذلك أساس V هو B وأساس W هو C. لذا فإن لكل متجه x في V المصفوفة الإحداثية $[X]_B$ هي متجه في R^n والمصفوفة الإحداثية $[T(x)]_C$ ستكون متجه في R^m. الشكل أدناه يوضح هذه الأفكار.

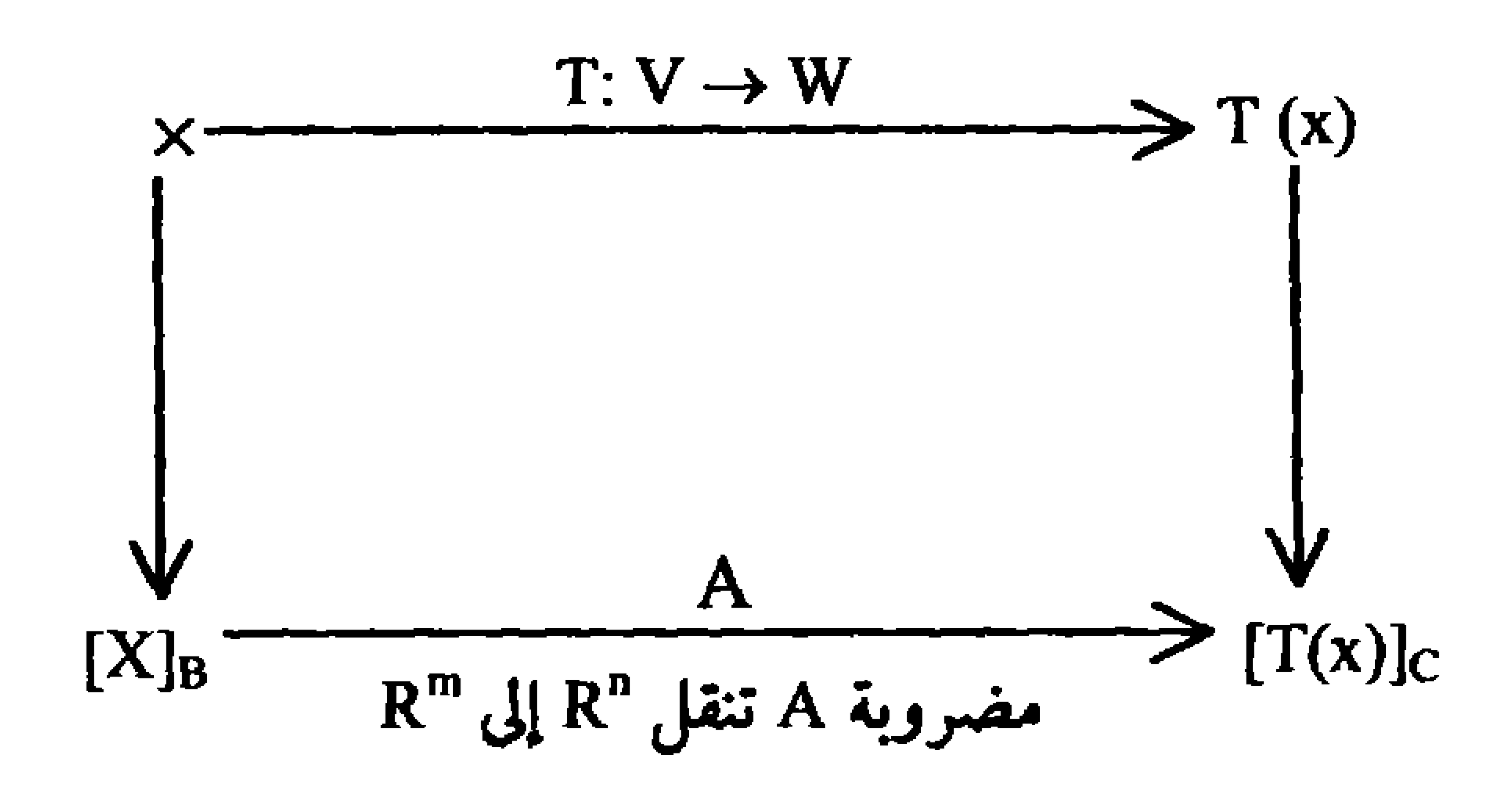


شكل (8-5)

وإذا أكملنا الشكل المستطيل أعلاه سنحصل على تطبيق (دالة) من R^n إلى R^m والتي يمكن إثباتها بأنها تحويلة خطية. فلو افترضنا أن A هي المصفوفة العامة لهذه التحويلة، فإن:

$$A[X]_B = [T(x)]_C \quad \text{.......} \quad (1)$$

المصفوفة A يقال لها مصفوفة T نسبة للأساسين B و C، لاحظ الشكل



شكل (6-8)

سنوضح بعد ذلك بعض استخدامات المصفوفة A في العلاقة (1)، ولكن قبل ذلك سنبين كيف نكون A.

نفرض $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساس V و $C = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ أساس W وليكن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

بحيث تتحقق العلاقة (1) لكل $x \in V$. بمعنى آخر نريد تحقيق هذه العلاقة لمتجهات الأساس $v_1, v_2, ..., v_n$، أي:

$$A\,[v_1]_B = [T(v_1)_c]\ ,\ A\,[v_2]_B = [T(v_2)]_c \ \ldots\ ,\ A\,[v_n]_B = [T(v_n)]_c \ \ldots\ldots\ (2)$$

لكن

$$[v_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\ [v_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, [v_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\,[v_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$A\,[v_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

$$A\,[v_m]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

وبالتعويض في (2) نحصل على:

$$[T(v_1)]_C = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, [T(v_2)]_C = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots. [T(v_n)]_C = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

الأعمدة المتتالية للمصفوفة A هي مصفوفات إحداثية. لـ:

$T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$

نسبة للأساس C.

لذا فإن مصفوفة T نسبة للأساسات C, B هي

$A = [T(v_1)]_C : [T(v_2)]_C : \ldots : [T(v_n)]_C$ .... (3)

سنرمز لهذه المصفوفة بالرمز $[T]_{C,B}$. لذا فإن العلاقة (3) تكتب بالشكل:

$[T]_{C,B} = [\ [T(v_1)]_C : [T(v_2)]_C : .... : [T(v_n)]_C$ .... (4)

وبموجب العلاقة (1) فإن المصفوفة في (4) تكتب:

$[T]_{C,B} \quad [X]_B = [T(x)]_C$ .... (5)

أساس فضاء المنطلق ←

أساس فضاء المدى ←

مثال (1):

لتكن $T: P_2 \rightarrow P_4$ تحويلاً خطياً معرفاً كالآتي:

$$T(P(x)) = x^2 P(x)$$

أوجد مصفوفة التحويل لـ T بالنسبة للأساسين:

$$B = \{P_1, P_2, P_3\}$$

$$C = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$$

$P'_1 = 1$ و $P_1 = 1 + x^2$

$P'_2 = x$ و $P_2 = 1 + 2x + 3x^2$

$P'_3 = x^2$ و $P_3 = 4 + 5x + x^2$

الحل:

من الشكل T نجد:

$$T(P_1) = x^2(1 + x^2) = x^2 + x^4$$

$$T(P_2) = x^2(1 + 2x + 3x^2) = x^2 + 2x^3 + 3x^4$$

$$T(P_3) = x^2(4 + 5x + x^2) = 4x^2 + 5x^3 + x^4$$

المصفوفات الإحداثية بالنسبة للأساس C هي:

$$[T(P_1)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \ [T(P_2)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} , \ [T(P_3)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

عليه فإن مصفوفة T بالنسبة للأساسين C, B هي:

$$A = [\ [T(P_1)]_C : [T(P_2)]_C : [T(P_3)_C]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (2):

نفرض $T = R^2 \to R^3$ تحويلة خطية معرفة بالشكل:

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفة T نسبة للأساسين $B = \{v_1, D_2\}$ بالنسبة لـ R^2 و $C = \{u_1, u_2, u_3\}$ بالنسبة لـ R^3، حيث $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$،

$u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

الحل:

من تعريف T:

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad , \quad T(v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

وبالتعبير عن $T(v_1)$ و $T(v_2)$ كتركيب خطي من u_3, u_2, u_1 نحصل على:

لذا فإن $[T(v_1)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(v_2)]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

إذن:

$$[T]_{C.B} = [\,[T(v_1)]_C : [T(v_2)]_C\,] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

عندما $V = W$ فإن $T: V \rightarrow W$ تسمى عملية خطية وفي مثل هذه الحالـة $B = C$ عند إيجاد مصفوفة T. يقال للمصفوفة T مصفوفة T نسبة إلى B وتكتب $[T]_B$ بـدلاً من $T_{B,C}$. إذا فرضنا أن $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ فـإن الصيـغ (4) و (5) تـأخذ الصيـغ الآتية:

$[T]_B = [T(v_1)_B : [T(v_2)]_B : \dots : [T(v_n)]_B\,]$ .... (6)

وكذلك:

$[T]_B\,(x)\,]_B = [T(x)]_B$ .... (7)

لاحظ أن العلاقتين (6) و (7) تنصان على أن مصفوفة T مضروبة في مصفوفة إحداثيات x هي مصفوفة إحداثيات T (x).

مثال (3):

لتكن $T: R^2 \to R^2$ عملية خطية معرفة بالشكل:

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفة T بالنسبة للأساس $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ حيث

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}،\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}،\ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

الحل:

$$T(v_1) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1 - v_2$$

$$T(v_2) = T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix} \frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$

$$T(v_3) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$$

$$[T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix},\ [T(v_3)]_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

إذن مصفوفة T نسبة إلى B هي $A = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

طريقة لإيجاد T (x) من $[T]_{C,B}$:

1. احسب مصفوفة الإحداثيات $[X]_C$.
2. اضرب $[x]_B$ من جهة اليسار من $[T]_{C,B}$.
3. أعد تكوين T (x) من مصفوفة إحداثياتها $[T(x)_C]$.

مثال (4):

إذا علمت أن $T: P_2 \to P_2$ عملية معرفة بالشكل: $T[P(x)] = P(3x - 5)$ أي:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1(3x - 5) + a_2(3x - 5)^2]$$

أوجد $[T]_B$ حيث $B = \{1, x, x^2\}$.

الحل:

(1) بموجب صيغة T نحصل على:

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x)_B] = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

لذا: $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

لهذا وبموجب العلاقة (6):

$$[T(1 + 2x + 3x^2)]_B = [T(p)]_B$$

ومن ذلك نحصل على:

$$T(1 + 2x + 3x^2) = 66 - 48x + 27x^2$$

(3) من الحسابات المباشرة

$$T(1 + 2x + 3x^2) = 1 + 2(3x - 5) + 3(3x - 5)^2$$

$$= 66 - 46x + 27x^2$$

لاحظ أن النتيجة في الخطوة (3) هي نفسها في الخطوة (2).

تمارين بند (4-8)

1 - لتكن $T:R^3 \to R^3$: معرفة بالشكل : $T(a, b, c) = (a-b, b-a, b-c)$. أوجد مصفوفة T نسبة للأساس $B = (v_1, v_2, v_3)$، حيث $V_1= (1,0,1)$، $V_2=(0,1,1)$، $V_3=(1,1,0)$.

2 - إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ مصفوفة T حيث $T:R^2 \to R^2$ نسبة للأساس $S = \{v_1, v_2\}$.

حيث $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$، $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ أوجد:

a) $[T(v_1)]_S$ و $[T(v_2)]$.

b) $T(v_1)$, $T(v_2)$.

c) صيغة $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

d) استخدم نتيجة (2) لإيجاد $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

3 - لتكن $T_1 : p_1 \to p_2$ تحويلة خطية معرفة بالشكل: $T1 (a_o + a_1x)=2a_o - 3a_1$ و $T_2 : p_2 \to p_3$ تحويلة خطية معرفة:

$$T_2(a_o + a_1x + a_2x^2) = 3a_o - 3a_1x^2 + 3a_2x^3$$

افرض $S_1 = \{1, x\}$ و $S_2 = \{1, x, x^2\}$ و $S_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$

أوجد:

$[T]_{S_2, S_1}$, $[T_2]_{S_1, S_2}$, $[T_2 \circ T_1]_{S_1, S_2}$

معجم المصطلحات العلمية

English	العربية
A	
Adjoint Matrix	مصفوفة مصاحبة
Array	ترتيب
Augmented Matrix	مصفوفة ممتدة
B	
Basis	أساس
Bijective	متباين
C	
Combination	تركيب
Components	مركبات
Cofacter	عامل مرافق
Composition	تركيب
Contruction	تقلص
Consistent	متسق
Cross product	ضرب اتجاهي
Correspondence	تقابل
Cramer vule	قاعدة كرامر
D	
Determinent	محدد
Dependent	غير مستقل
Dilation	امتداد
Dimension	بعد
Diagonal	قطري
Diagonalizable	قابلة للأقطرة
Domain	منطلق
Dot product	ضرب نقطي

English	العربية
Elimination	حذف
Expansion	مفكوك
Eigen value	قيمة ذاتية
Eigen Vector	متجه ذاتي
H	
Homogeneous	متجانس
I	
Image	صورة
Independent	مستقل
Inner product	ضرب داخلي
Invertible	قابلة للانعكاس
Invers	إنعكاس
Inversion	تعاكس
K	
Kernel	نواة
L	
Leading Voriable	متغير دليلي
Linear	خطي
M	
Matrix	مصفوفة

E	
Entry	عنصر المصفوفة

O	
Operation	عملية
Orthogonal	متعامد
Orthonomal	عياري

P	
Parameter	وسيط
Permutation	تبديلة
Projection	اسقاط

R	
Range	المدى
Rank	رتبة
Rectangular	الإحداثى المتعامد
Reduced matrix	مصفوفة مختزلة
Reflection	انعكاس
Reduced row – echelon from	الصيغة المدرجة المختزلة
Rotation	دوران

S	
Scalar	كمية ثابتة
Space	فضاء
Span	تولد - تنشأ
Standard basis	أساس طبيعى
System	نظام
Symmtric	تناظر

N	
Norm	طول (معيار)
Normol	ناظم
Nullspace	فضاء صفري
Nullity	صفرية

T	
Transpose	منقولة
Triangular matrix	مصفوفة مثلثية
Tuple	فئة
Transformation	تحويل
Transition	انتقال
Translation equation	معادلة انتقال

U	
Unit vector	متجه احادي
	متجه

V	
Voctor	متجه


دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه
www.massira.jo


دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه
www.massira.jo

مقدمة في

الجبر الخطي




9 789957 065164


دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه
www.massira.jo